Aula 9: Dependência/Independência Linear

- $V = (V, +, \cdot)$ espaço vetorial

Def: Sejam $v_1, \dots, v_k \in V$. Dizemos que $v_1, \dots, v_k$ são Linearmente Independentes (L.I.) se

$$\underbrace{x_1 v_1 + \dots + x_k v_k = \vec{0}_V}_{\circledast} \implies x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0 \qquad (x_i \in \mathbb{R} \ \forall i)$$

OBS: $\circledast$ é uma equação com incógnitas $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$. Esta equação tem uma solução trivial: $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$. Os vetores $v_1, \dots, v_k$ são L.I. se esta for a ÚNICA solução de $\circledast$.

Def $v_1, \dots, v_k$ são Linearmente Dependentes (L.D.) se não são L.I. Ou seja, $v_1, \dots, v_k$ são L.D. se existem $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ com $x_i \neq 0$ para algum $i \in \{1, \dots, k\}$ tais que

$$x_1 v_1 + \dots + x_k v_k = \vec{0}_V$$

(Nesse caso, $x_1, \dots, x_k$ é uma solução não trivial da equação $\circledast$)

Prop: Sejam $v_1, \dots, v_k \in V$, $k \geq 2$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. $v_1, \dots, v_k$ são L.D.
2. Existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que v_i é combinação linear de $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k$

Dem: 1 $\Rightarrow$ 2

$v_1, \dots, v_k$ L.D. $\Rightarrow \exists x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$, $x_i \neq 0$ para algum i, tal que

$x_1 v_1 + \dots + x_k v_k = 0$. Sendo $x_i \neq 0$, temos que

$$v_i = -\frac{x_1}{x_i} v_1 - \dots - \frac{x_{i-1}}{x_i} v_i - \frac{x_{i+1}}{x_i} v_{i+1} - \dots - \frac{x_k}{x_i} v_k \quad //$$

2 $\Rightarrow$ 1

Se $v_i = a_1 v_1 + \dots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \dots + a_k v_k$

$\Rightarrow a_1 v_1 + \dots + a_{i-1} v_{i-1} - v_i + a_{i+1} v_{i+1} + \dots + a_k v_k = 0$

$\Rightarrow v_1, \dots, v_k$ L.D. (Note que $x_i = -1 \neq 0$) ∎

Exemplos:

1 $V = P_2(\mathbb{R})$, $p_1(x) = (x+3)$, $p_2(x) = x^2 + 6x + 9$

$p_1(x), p_2(x)$ são L.I.

De fato, supoha que $a p_1(x) + b p_2(x) = 0$

$\Rightarrow a(x+3) + b(x^2 + 6x + 9) = 0 \Rightarrow b x^2 + (a + 6b)x + (3a + 9b) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a + 6b = 0 \\ 3a + 9b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = 0$$

2 $V = \mathbb{R}^4$, $v_1 = (1,0,-1,1)$, $v_2 = (0,1,1,0)$, $v_3 = (1,1,0,1)$

v_1, v_2, v_3 são L.D.:

Suponha que $x v_1 + y v_2 + z v_3 = 0 \Rightarrow x(1,0,-1,1) + y(0,1,1,0) + z(1,1,0,1) = (0,0,0,0)$

$\Rightarrow (x+z, y+z, -x+y, x+z) = (0,0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ y+z=0 \\ -x+y=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x=-z \\ y=-z \\ z \text{ arbitrário} \end{array}$$

Por exemplo, tomando $z=1$, temos

$$-v_1 - v_2 + v_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1, v_2, v_3 \text{ são L.D.} \;//$$

<u>Cuidado!</u> $v_1, \dots, v_k$ L.D. $\not\Rightarrow$ $v_1 = a_2 v_2 + \dots + a_k v_k$

<u>Exemplo</u>: $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (0,0,1)$, $v_4 = (0,1,1)$

v_1, v_2, v_3, v_4 são L.D. pois

$$0v_1 + v_2 + v_3 - v_4 = 0 \qquad (v_4 = v_2 + v_3)$$

mas v_1 <u>NÃO</u> pode ser escrito como combinação linear de v_2, v_3, v_4 (Exercício! Mostre que $v_1 \notin [v_2, v_3, v_4]$)

<u>Prop</u>: Suponha que $v_1, \dots, v_k$ são L.D., $w \in V$.
$\Rightarrow v_1, \dots, v_k, w$ são L.D.

<u>Dem</u>: Sejam $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$, $x_i \neq 0$ para algum i, tais que

$$x_1 v_1 + \dots + x_k v_k = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \underbrace{x_1 v_1 + \dots + x_k v_k + 0w}_{\text{combinação linear não trivial de } v_1, \dots, v_k, w.} \quad (x_i \neq 0)$$

$\blacksquare$

<u>Prop</u>: Suponha que $v_1, \dots, v_k$ são L.I. $\Rightarrow v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k$ são L.I.

<u>Dem</u>: Pela prop. anterior, se $v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, \dots, v_k$ fossem L.D. $\Rightarrow v_1, \dots, v_k$ seria L.D. $\blacksquare$

Pergunta: Seja $S \subset V$ um subespaço vetorial.

① Qual é o número máximo de vetores $v_1, \dots, v_k \in S$ tais que $v_1, \dots, v_k$ são L.I.?

② Qual o número mínimo de vetores $w_1, \dots, w_\ell \in S$ tais que $S = [w_1, \dots, w_\ell]$?

Vamos mostrar que esses dois números coincidem. Para isso, vamos precisar usar o seguinte resultado sobre sistemas lineares que será demonstrado mais para frente:

Prop: Um sistema de equações lineares homogêneo* com mais incógnitas do que equações é sempre possível indeterminado (admite soluções não triviais)

$$* \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad n > m$$

Ideia da dem: cada equação pode ser usada para eliminar (no máximo) uma incógnita colocando ela em função das outras. Se $n > m$ sobram incógnitas livres.

Def: Seja $S \subset V$ um subespaço. Uma **base de S** é um conjunto ordenado $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_d)$ tal que

① $S = [v_1, \dots, v_d]$

② $v_1, \dots, v_d$ são L.I.

NÃO TEM BASE!

Quando S admite uma base (ou se $S = \{0\}$) dizemos que S tem dimensão finita.

Prop: Seja S um espaço de dimensão finita e seja $\mathcal{B}=(w_1,\dots,w_\ell)$ uma base de S. Se $v_1,\dots,v_k \in S$ são L.I. $\Rightarrow$ $k\leq \ell$

Dem: Suponha que $k>\ell$. Vamos mostrar que $v_1,\dots,v_k$ são L.D. Como $S=[w_1,\dots,w_\ell]$ e $v_i\in S$ $\forall i$ temos que

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_{11}w_1+\dots+a_{\ell 1}w_\ell \\ v_2 &= a_{12}w_1+\dots+a_{\ell 2}w_\ell \\ &\ \ \vdots \\ v_k &= a_{1k}w_1+\dots+a_{\ell k}w_\ell \end{aligned}\right\} (**)$$

Considere a equação $(*)$ $x_1v_1+\dots+x_kv_k=0$
nas incógnitas $x_1,\dots,x_k\in\mathbb{R}$. Vamos mostrar que esta equação admite solução não trivial.

Substituindo $(**)$ em $(*)$ obtemos

$$(a_{11}x_1+\dots+a_{1k}x_k)w_1+\dots+(a_{\ell 1}x_1+\dots+a_{\ell k}x_k)w_k=0$$

Como $w_1,\dots,w_k$ são L.I., esta equação é equivalente ao sistema $(***)$ abaixo.

Logo, se $x_1,\dots,x_k$ forem soluções do sistema

$$(***)\left\{\begin{aligned} a_{11}x_1+\dots+a_{1k}x_k&=0 \\ &\ \ \vdots \\ a_{\ell 1}x_1+\dots+a_{\ell k}x_k&=0 \end{aligned}\right.$$

então, $x_1v_1+\dots+x_kv_k=0$. Mas com $\ell<k$, (***) tem mais incognitas do que equações. Segue que (***) admite solução não trivial $\Rightarrow$ (*) admite solução não trivial $\Rightarrow$ $v_1,\dots,v_k$ são L.D. ∎ (6)

__Teorema__: Suponha que $S\subset V$ é um subespaço de dimensão finita e seja $\mathcal{B}=(v_1,\dots,v_d)$ uma base de S. Então,

(1) O número máximo de vetores L.I. em S é d

(2) O número mínimo de vetores que geram S é d

(3) Qualquer base de S tem d vetores

__Dem__:

(1) Pela prop anterior, $([v_1,\dots,v_d]=S)$ implica que se $k>d$ $\Rightarrow$ $w_1,\dots,w_k$ são sempre L.D. //

(2) Se $S=[w_1,\dots,w_k]$ com $k<d$ $\Rightarrow$ $v_1,\dots,v_d$ seriam L.D. O que contradiz o fato de $\mathcal{B}=(v_1,\dots,v_d)$ ser base de S.

(3) Seja $E=(w_1,\dots,w_k)$ uma base de S.

- $w_1,\dots,w_k$ L.I. $\Rightarrow$ $d\geq k$
- $w_1,\dots,w_k$ gera S $\Rightarrow$ $d\leq k$

Logo $d=k$

<u>Def</u>: Seja $S \subset V$ um sobespaço. Se $B = (v_1, \dots, v_d)$ é base de S, dizemos que a <u>dimensão de S é d</u> e escrevemos $\boxed{\dim S = d}$

- Se $S = \{0\} \Rightarrow \dim S = 0$ (por definição)
- Se $S \neq \{0\}$ e S não admite base $\Rightarrow \dim S = \infty$

<u>Próxima Aula</u>:

1. Exemplos
2. Coordenadas de um vetor numa base
3. Teorema do completamento.