Aula 8:

Lembre que:

- Um <u>subespaço vetorial</u> de $(V,+,\cdot)$ é um subconjunto $S \subset V$ tal que
  (i) $\vec{0}_V \in S$
  (ii) $v, w \in S \Rightarrow v+w \in S$
  (iii) $v \in S,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda v \in S$

- Se $S_1, S_2 \subset V$ são subespaços então

$$S_1+S_2 = \{v_1+v_2 \mid v_1 \in S_1,\ v_2 \in S_2\}$$ é um subespaço de V

- Exemplo: $S_1 = [u_1, \dots, u_k]$, $S_2 = [w_1, \dots, w_\ell] \Rightarrow$

$$S_1+S_2 = [u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_\ell]$$

- S_1+S_2 é o menor subespaço de V que contém S_1 e S_2.

<u>Def</u>: Seja $S = S_1+S_2$ um subespaço de V. Seja $v \in S$.
Uma <u>decomposição de v</u> é dada por

$$v = v_1+v_2 \quad \text{onde } v_1 \in S_1,\ v_2 \in S_2$$

<u>Cuidado!!!</u> Em geral a decomposição NÃO é única!

<u>Exemplo</u>: $V = \mathbb{R}^3$, $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$, $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+z=0\}$

1) Note que $S_1+S_2 = \mathbb{R}^3$:

Para ver isso, precisamos mostrar que qualquer vetor $v=(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ pode ser escrito como $v = v_1+v_2$ onde $v_1 \in S_1$, $v_2 \in S_2$

$v_1=(x_1,y_1,z_1)\in S_1 \iff x_1+y_1+z_1=0 \iff x_1=-y_1-z_1 \iff$

$\iff v_1=(-y_1-z_1\,,\,y_1,z_1)$

$v_2=(x_2,y_2,z_2)\in S_2 \iff x_2-y_2+z_2=0 \Rightarrow x_2=y_2-z_2 \iff v_2=(y_2-z_2\,,\,y_2,z_2)$

Logo, para escrever $v=v_1+v_2$, precisamos encontrar $y_1,z_1,y_2,z_2\in\mathbb{R}$ tais que

$$(a,b,c)=(-y_1-z_1,y_1,z_1)+(y_2-z_2,y_2,z_2)=(-y_1+y_2-z_1-z_2\,,\,y_1+y_2\,,\,z_1+z_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -y_1+y_2-z_1-z_2=a \\ y_1+y_2=b \\ z_1+z_2=c \end{cases}$$

$z_1+z_2=c \Rightarrow -y_1+y_2-(z_1+z_2)=-y_1+y_2-c \overset{(1)}{=} a$

$\Rightarrow y_2=y_1+a+c$

$(2)\Rightarrow 2y_1+a+c=b \Rightarrow y_1=\dfrac{b-a-c}{2} \Rightarrow y_2=\dfrac{a+b+c}{2}$

$(3)\Rightarrow z_1=c-z_2$ (z_2 é arbitrário!) (verifique!!!)

Ou seja, uma decomposição de v é dada por $(z_2=0)$

$$(a,b,c)=\underbrace{\left(\frac{a-b-c}{2},\frac{-a+b-c}{2},c\right)}_{\in S_1}+\underbrace{\left(\frac{a+b+c}{2},\frac{a+b+c}{2},0\right)}_{\in S_2}$$

2) A decomposição de um vetor $v\in\mathbb{R}^3$ com $v=v_1+v_2$, $v_1\in S_1$, $v_2\in S_2$ Não é única!

Por exemplo, $v=(1,1,1)$:

$$(1,1,1)=\overset{S_1}{\left(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},1\right)}+\overset{S_2}{\left(\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2},0\right)}$$
$$=\left(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},0\right)+\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},1\right)$$

3) Note que $S_1 \cap S_2 = [(1,0,-1)] \neq \{0\}$ (Verifique!)

Prop: Seja $S = S_1 + S_2$. A decomposição de um vetor $v \in S$ como $v = v_1 + v_2$ com $v_1 \in S_1$, $v_2 \in S_2$ é única $\Leftrightarrow$ $S_1 \cap S_2 = \{0\}$

Dem: ($\Leftarrow$) Suponha que $S_1 \cap S_2 = \{0\}$ e seja $v \in S_1 + S_2$

suponha que $v = v_1 + v_2$ e $v = w_1 + w_2$ com $v_1, w_1 \in S_1$, $v_2, w_2 \in S_2$

$\Rightarrow v - v = 0 = (v_1 - w_1) + (v_2 - w_2)$

$\Rightarrow (v_1 - w_1) = (w_2 - v_2) \Rightarrow \begin{array}{l} v_1 - w_1 \in S_1 \cap S_2 \\ w_2 - v_2 \in S_1 \cap S_2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} v_1 = w_1 \\ v_2 = w_2 \end{array}$

($\Rightarrow$) Suponha que a decomposição $v = v_1 + v_2$ é única para todo $v \in S_1 + S_2$.

Suponha que ve $v \in S_1 \cap S_2$

$$\Rightarrow v = \underset{S_1}{v} + \underset{S_2}{0} = \underset{S_1}{0} + \underset{S_2}{v} \xrightarrow[\text{(unicidade)}]{} v = 0 \Rightarrow S_1 \cap S_2 = \{0\}$$

■

Def: Dizemos que uma soma de subespaços $S_1 + S_2$ é uma <u>soma direta</u> se $S_1 \cap S_2 = \{0\}$.

Nesse caso, escrevemos $S_1 \oplus S_2$ para enfatizar que a soma é direta.

Ou seja: Denotamos o subespaço $S_1 + S_2$ por $S_1 \oplus S_2$ quando $S_1 \cap S_2 = \{0\}$.

Exemplo: Lembre que a transposta de uma matriz $m \times n$ é uma matriz $n \times m$ onde as linhas são trocadas pelas colunas, i.e.

Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}$

$\Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times m}$.

Exemplo

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- Uma matriz $n \times n$ é <u>simétrica</u> se $A = A^T$
- Uma matriz $n \times n$ é <u>anti-simétrica</u> se $A = -A^T$

Exemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ é Simétrica

$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ é Anti-simétrica

- $\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n} \mid A = A^T\} \subset \mathcal{M}_{n\times n}$ é subespaço
- $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n} \mid A = -A^T\} \subset \mathcal{M}_{n\times n}$ é subespaço

(*)

(*) **Exercício**: Mostre que $T : \mathcal{M}_{n\times n} \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times n}$, $A \longmapsto \frac{1}{2}(A + A^T)$ é linear e que $\mathrm{Im}(T) = \mathcal{S}$, $N(T) = \mathcal{A}$.

Note que:

(i) $\mathcal{M}_{n\times n} = \mathcal{S} + \mathcal{A}$ pois se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$

$$\Rightarrow A = \underbrace{\tfrac{1}{2}(A+A^T)}_{\mathcal{S}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(A-A^T)}_{\mathcal{A}}$$

(ii) $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{0\}$

Logo $\mathcal{M}_{n\times n} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$;

Qualquer matriz quadrada pode se escrita de maneira única como uma soma de uma matriz simétrica e uma anti-simétrica.

Exemplo: $V = \mathbb{R}^3$, $\pi \subset V$ um plano passando pela origem, $\vec{n}_\pi \in \mathbb{R}^3$ o vetor normal à π

$$\Rightarrow \mathbb{R}^3 = \pi \oplus [\vec{n}_\pi]$$

Dado $u \in \mathbb{R}^3$ podemos escrever $u = v + w$ (de maneira única!) onde $v \in \pi$ e $w \in [\vec{n}_\pi]$.

- v é a projeção ortogonal de u em π
- w é a projeção ortogonal de u em $[\vec{n}_\pi]$

Explicitamente:

$\langle , \rangle$ é o produto escalar do $\mathbb{R}^3$

$$w = \frac{\langle u, \vec{n}_\pi \rangle^{*}}{\|\vec{n}_\pi\|^2} \vec{n}_\pi, \quad v = u - \frac{\langle u, \vec{n}_\pi \rangle^{*}}{\|\vec{n}_\pi\|^2} \vec{n}_\pi$$

OBS: Para verificar essas fórmulas, basta verificar duas coisas:

① $v \in \pi$, $w \in [\vec{n}_\pi]$, ② $v + w = u$

Mas: . $w \in [\vec{n}_\pi]$ ✓ (múltiplo de $\vec{n}_\pi$)

- $v \in \pi$: basta calcular $\langle v, \vec{n}_\pi \rangle$ e ver que dá 0

$$\left\langle u - \frac{\langle u, \vec{n}_\pi\rangle}{\|\vec{n}_\pi\|^2}\vec{n}_\pi , \vec{n}_\pi \right\rangle = \langle u, \vec{n}_\pi\rangle - \frac{\langle u, \vec{n}_\pi\rangle}{\cancel{\|\vec{n}_\pi\|^2}} \cancel{\langle \vec{n}_\pi, \vec{n}_\pi\rangle}$$

$$= \langle u, \vec{n}_\pi\rangle - \langle u, \vec{n}_\pi\rangle = 0$$

- $$v + w = u - \cancel{\frac{\langle \vec{u}, \vec{n}_\pi\rangle}{\|\vec{n}_\pi\|^2}\vec{n}_\pi} + \cancel{\frac{\langle \vec{u}, \vec{n}_\pi\rangle}{\|\vec{n}_\pi\|^2}\vec{n}_\pi} = u \quad //$$

Exemplo: Seja $\pi \subset \mathbb{R}^3$, $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$

$\vec{n} = (1, 1, 1)$, $\|\vec{n}\|^2 = 3$

Dado $u = (x, y, z)$ podemos escrever

$$(x, y, z) = \underbrace{\left(\frac{2x - y - z}{3}, \frac{-x + 2y - z}{3}, \frac{-x - y + 2z}{3}\right)}_{\in\, \pi} + \underbrace{\left(\frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}\right)}_{\in\, [\vec{n}]} \quad //$$