Aula 6 / Aula 7

Lembre que:

- Um <u>subespaço vetorial</u> de um espaço vetorial $(V,+,\cdot)$ é um subconjunto $S\subset V$ que satisfaz:

  (i) $\vec{0}_V \in S$

  (ii) $v,w\in S \Rightarrow v+w\in S$

  (iii) $v\in S,\ \lambda\in\mathbb{R} \Rightarrow \lambda v\in S$

- Se $v_1,\dots,v_k\in V$, e $a_1,\dots,a_k\in\mathbb{R}$, dizemos que o vetor $a_1v_1+\dots+a_kv_k\in V$ é uma <u>combinação linear de $v_1,\dots,v_k$</u>

- $[v_1,\dots,v_k]=\{a_1v_1+\dots+a_kv_k \mid a_1,\dots,a_k\in\mathbb{R}\}\subset V$ é um subespaço: <u>subespaço gerado</u> por $v_1,\dots,v_k$

- $v_1,\dots,v_k$ são <u>geradores</u> de um subespaço S se

$$S=[v_1,\dots,v_k]$$

<u>Prop</u>: Seja $S\subset V$ um subespaço e $v_1,\dots,v_k\in V$. Então

$$[v_1,\dots,v_k]\subset S \iff v_i\in S \quad \forall i\in\{1,\dots,k\}.$$

<u>Dem</u>

$(\Rightarrow)$ Note que $v_i\in[v_1,\dots,v_k]$ $\forall i$ pois

$$v_i = 0\cdot v_1+0v_2+\dots+0v_{i-1}+1\cdot v_i+0\cdot v_{i+1}+\dots+0\cdot v_k$$

$a_1=a_2=\dots=a_{i-1}=a_{i+1}=\dots=a_k=0$

$a_i=1$

Logo $[v_1,\dots,v_k]\subset S \Rightarrow v_i\in S$ $\forall i$.

($\Leftarrow$) Suponha que $v_1, \dots, v_k \in S$, e seja $w \in [v_1, \dots, v_k]$.
Temos que mostrar que $w \in S$.
mas $w = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k \in S$ pois S é subespaço. ∎

Consequências:

1) $[v_1, \dots, v_k]$ é o menor subespaço de V que contém os vetores $v_1, \dots, v_k$
Ou seja, se $S \subset V$ é um subespaço de V e $v_1, \dots, v_k \in S$
$\Rightarrow [v_1, \dots, v_k] \subset S$

2) Se $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_\ell \in V$ então $[v_1, \dots, v_k] = [w_1, \dots, w_\ell]$
$\Leftrightarrow$ $v_1, \dots, v_k \in [w_1, \dots, w_\ell]$ e $w_1, \dots, w_\ell \in [v_1, \dots, v_k]$.

Exemplo:

$V = \mathbb{R}^4$, $v_1 = (1,-1,0,1)$, $v_2 = (0,1,1,0)$, $v_3 = (1,0,1,1)$
$w_1 = (1,1,2,1)$, $w_2 = (2,-1,1,2)$

Pergunta: $[v_1, v_2, v_3] = [w_1, w_2]$?

(i) Vamos ver se $[v_1, v_2, v_3] \subset [w_1, w_2]$. Para isso, temos que verificar se $v_1, v_2, v_3 \in [w_1, w_2]$:

- $v_1 \in [w_1, w_2] \Leftrightarrow \exists\, x, y \in \mathbb{R}$ t.q. $v_1 = x w_1 + y w_2 \Leftrightarrow$ o sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 1 & (1) \\ x - y = -1 & (2) \\ 2x + y = 0 & (3) \\ x + 2y = 1 & (4) \end{cases}$$ é possível

Mas: $(3) \Rightarrow y = -2x$

$(2) \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}$

Vamos verificar se isto é solução do sistema:

$(1): \quad -\frac{1}{3} + 2\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{3}{3} = 1$ ✓

$(2): \quad \frac{-1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{3}{3} = -1$ ✓

$(3): \quad 2\cdot\left(\frac{-1}{3}\right) + \frac{2}{3} = 0$ ✓ $\quad \Longrightarrow \quad V_1 \in [w_1, w_2]$.

$(4): \quad -\frac{1}{3} + 2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{3} = 1$ ✓

- $V_2 \in [w_1, w_2] \Longleftrightarrow \exists\, x, y \in \mathbb{R}$ t.q. $V_2 = x w_1 + y w_2 \Longleftrightarrow$ o sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 0 & (1) \\ x - y = 1 & (2) \\ 2x + y = 1 & (3) \\ x + 2y = 0 & (4) \end{cases}$$ é possível

Mas, $(1) \Rightarrow x = -2y$

$(2) \Rightarrow -3y = 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

Vamos verificar se isto é solução do sistema:

$(1): \quad \frac{2}{3} + 2\left(\frac{-1}{3}\right) = 0$ ✓

$(2): \quad \frac{2}{3} - \left(\frac{-1}{3}\right) = 1$ ✓ $\quad \Longrightarrow \quad V_2 \in [w_1, w_2]$

$(3): \quad 2\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{3}{3} = 1$ ✓

$(4): \quad \frac{2}{3} + 2\left(\frac{-1}{3}\right) = 0$ ✓

- $V_3 \in [w_1, w_2] \Leftrightarrow \exists\, x, y \in \mathbb{R}$ t.q. $V_3 = x w_1 + y w_2 \Leftrightarrow$ o sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 1 & (1) \\ x - y = 0 & (2) \\ 2x + y = 1 & (3) \\ x + 2y = 1 & (4) \end{cases}$$ é possível

mas $(2) \Rightarrow x = y$, $(1) \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = y = \frac{1}{3}$. Vamos verificar se é solução:

(1): $\frac{1}{3} + 2\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ ✓

(2): $\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$ ✓ $\Rightarrow V_3 \in [w_1, w_2] \Rightarrow [v_1, v_2, v_3] \subset [w_1, w_2]$

(3): $2\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} = 1$ ✓

(4): $\frac{1}{3} + 2\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ ✓

(ii) Vamos verificar se $[w_1, w_2] \subset [v_1, v_2, v_3]$. Para isso, temos que verificar se $w_1, w_2 \in [v_1, v_2, v_3]$

- $w_1 \in [v_1, v_2, v_3] \Leftrightarrow \exists\, x, y, z \in \mathbb{R}$ t.q. $w_1 = x v_1 + y v_2 + z v_3 \Leftrightarrow$

o sistema $$\begin{cases} x + z = 1 & (1) \\ -x + y = 1 & (2) \\ y + z = 2 & (3) \\ x + z = 1 & (4) \end{cases}$$ é possível

mas, $(1) \Rightarrow x = 1 - z$

$(2) \Rightarrow -1 + z + y = 1 \Rightarrow y = 2 - z \Rightarrow$ $x = 1 - z$, $y = 2 - z$, z é arbitrário

$(3) \Rightarrow 2 - z + z = 2$ ✓

$\Rightarrow (z = 0)$, $x = 1, y = 2, z = 0$ é uma solução do sistema

Vamos verificar se é solução:

(1): $1 = 1$ ✓

(2): $-1 + 2 = 1$ ✓

(3): $2 = 2$ ✓ $\Rightarrow w_1 \in [v_1, v_2, v_3]$

(4): $1 = 1$ ✓

• $w_2 \in [v_1, v_2, v_3] \iff \exists x, y, z \in \mathbb{R}$ t.q. $w_2 = x v_1 + y v_2 + z v_3 \iff$

o sistema
$$\begin{cases} x + z = 2 & (1) \\ -x + y = -1 & (2) \\ y + z = 1 & (3) \\ x + z = 2 & (4) \end{cases}$$
é possível

Solução: $x = 2 - z \Rightarrow z - 2 + y = -1 \Rightarrow y = 1 - z$ z arbitrário

$\Rightarrow (z = 0)$ $x = 2, y = 1, z = 0$ é uma solução

(1)✓, (2)✓, (3)✓, (4)✓

$\Rightarrow w_2 \in [v_1, v_2, v_3] \Rightarrow w_1, w_2 \in [v_1, v_2, v_3] \Rightarrow [w_1, w_2] \subset [v_1, v_2, v_3]$

Logo $[v_1, v_2, v_3] = [w_1, w_2]$ //

Prop: Seja $T: V \to W$ uma aplicação linear. Sejam $v_1, \dots, v_k$ geradores de V. Então

$$\mathrm{Im}(T) = [T(v_1), \dots, T(v_k)]$$

Dem: (i) $[T(v_1), \dots, T(v_k)] \subset \mathrm{Im}(T)$ pois $\mathrm{Im}(T) \subset W$ é um subespaço e $T(v_i) \in \mathrm{Im}(T)$ $\forall i = 1, \dots, k$
(Aplica a proposição da página 1)

(ii) $\mathrm{Im}(T) \subset [T(v_1), \dots, T(v_k)]$

Seja $w \in \mathrm{Im}(T)$. $\Rightarrow w = T(v)$ para algum $v \in V$. mas V é gerado por $v_1, \dots, v_k$ e portanto existem $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ tais que $v = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k$

$$\Rightarrow w = T(v) = T(a_1 v_1 + \dots + a_k v_k) = T(a_1 v_1) + T(a_2 v_2) + \dots + T(a_k v_k)$$
$$= a_1 T(v_1) + \dots + a_k T(v_k) \in [T(v_1), \dots, T(v_k)]$$ ∎

Exemplo: Seja $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x,y) = (x+y, x-y, 2x)$

$\Rightarrow Im(T) = \{(x+y, x-y, 2x) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ é gerado por

$u = (1,1,2)$, $v = (1,-1,0)$.

De fato, $\mathbb{R}^2$ é gerado por $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$,

e $u = T(e_1)$, $v = T(e_2)$ //

- Soma e Interseção de Subespaços

Prop: Sejam S_1 e S_2 subespaços vetoriais de V.

Então $S_1 \cap S_2$ é um subespaço vetorial de V.

Dem: (i) $0 \in S_1 \cap S_2$ pois $\underbrace{0 \in S_1}_{S_1 \text{ é subespaço}}$ e $\underbrace{0 \in S_2}_{S_2 \text{ é subespaço}}$

(ii) Se $v, w \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow v, w \in S_1$ e $v, w \in S_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow v+w \in S_1$ e $v+w \in S_2 \Rightarrow v+w \in S_1 \cap S_2$

(iii) Se $v \in S_1 \cap S_2$ e $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow v \in S_1$ e $v \in S_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda v \in S_1$ e $\lambda v \in S_2 \Rightarrow \lambda v \in S_1 \cap S_2$ ■

Exemplo: Seja $V = \mathbb{R}^3$, $S_1 = [(1,-1,1), (1,0,1)]$, $S_2 = [(2,1,0), (1,1,1)]$

$\Rightarrow S_1$ e S_2 são planos que passam pela origem e

$S_1 \cap S_2$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem.

Vamos encontrar gerador(es) de $S_1 \cap S_2$:

$v = (x,y,z) \in S_1 \cap S_2 \iff v \in S_1$ e $v \in S_2$

$(x,y,z) \in S_1 \iff (x,y,z) = a(1,-1,1) + b(1,0,1)\ ,\ a,b \in \mathbb{R}$

$(x,y,z) \in S_2 \iff (x,y,z) = c(2,1,0) + d(1,1,1)\ ,\ c,d \in \mathbb{R}$

Logo, $(x,y,z) \in S_1 \cap S_2 \iff (x,y,z) = (a+b, -a, a+b) = (2c+d, c+d, d)$
$a,b,c,d \in \mathbb{R}$

$$\iff \begin{cases} a+b = 2c+d & (1) \\ -a = c+d & (2) \\ a+b = d & (3) \end{cases}$$

$(1)-(3) \Rightarrow 2c = 0 \Rightarrow c = 0$

$(2) \Rightarrow d = -a$

$(3) \Rightarrow b = -2a$

a é arbitrário. Logo, $(x,y,z) \in S_1 \cap S_2 \iff$

$\iff (x,y,z) = a(1,-1,1) - 2a(1,0,1) = (-a,-a,-a) = a(-1,-1,-1)$
$a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow S_1 \cap S_2 = [(-1,-1,-1)] = [(1,1,1)]$ (Uma reta que passa pela origem) //

- **Soma de Subespaços:**

$S_1, S_2 \subset V$ subespaços

Def: $S_1 + S_2 = \{ v_1 + v_2 \mid v_1 \in S_1, v_2 \in S_2 \}$

Prop: Se $S_1, S_2 \subset V$ são subespaços $\Rightarrow S_1 + S_2$ é subespaço de V.

Dem: (i) $0 \in S_1 + S_2$ pois $0 = 0 + 0$ $(v_1 = 0 \in S_1,\ v_2 = 0 \in S_2)$

(ii) Se $v, w \in S_1 + S_2 \Rightarrow v = v_1 + v_2\ ,\ v_1 \in S_1, v_2 \in S_2,$
$w = w_1 + w_2\ ,\ w_1 \in S_1,\ w_2 \in S_2$

$\Rightarrow v+w = (v_1+v_2)+(w_1+w_2) = \underbrace{(v_1+w_1)}_{S_1} + \underbrace{(v_2+w_2)}_{S_2} \in S_1+S_2$ ✓

(iii) $v \in S_1+S_2$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow v = v_1+v_2$, $v_1 \in S_1$, $v_2 \in S_2$

$\Rightarrow \lambda v = \underbrace{\lambda v_1}_{S_1} + \underbrace{\lambda v_2}_{S_2} \in S_1+S_2$ ✓ ■

<u>Exemplo</u>: $V = \mathbb{R}^3$, $S_1 = [(1,1,2)]$, $S_2 = [(1,-1,0)]$

$$\Rightarrow S_1+S_2 = \{v_1+v_2 \mid v_1 \in S_1,\ v_2 \in S_2\}$$
$$= \{x(1,1,2)+y(1,-1,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$$
$$= [(1,1,2),(1,-1,0)] \quad \left(= \{(x+y, x-y, 2x) \mid x,y \in \mathbb{R}\}\right)$$

<u>Interpretação Geométrica</u>: S_1+S_2 é o menor subespaço de V que contém S_1 e S_2. (Ver prop. abaixo). <u>Cuidado</u>: $S_1 \cup S_2$ NÃO é subespaço vetorial (exceto quando $S_1 \subset S_2$ ou $S_2 \subset S_1$)

Por exemplo: $\underbrace{[(1,1,2)] \cup [(1,-1,0)]}_{S_1 \cup S_2}$ NÃO é subespaço pois

$(1,1,2) \in S_1 \cup S_2$
$(1,-1,0) \in S_1 \cup S_2$ mas

$$(1,1,2)+(1,-1,0) = (1,0,2) \begin{array}{l} \notin S_1 \\ \notin S_2 \end{array} \Big\} \Rightarrow \notin S_1 \cup S_2$$

<u>Prop</u>: Sejam $S_1, S_2, S \subset V$ subespaços vetoriais tais que $S_1 \subset S$ e $S_2 \subset S \Rightarrow S_1+S_2 \subset S$

<u>Dem</u>: Seja $v \in S_1+S_2 \Rightarrow v = v_1+v_2$, $v_1 \in S_1$, $v_2 \in S_2$

- $S_1 \subset S \Rightarrow v_1 \in S$
- $S_2 \subset S \Rightarrow v_2 \in S$
- S é subespaço $\Rightarrow v_1+v_2 \in S \Rightarrow S_1+S_2 \subset S$ ■

<u>Corolário</u>: Se $S_1 = [v_1, \dots, v_k]$, $S_2 = [w_1, \dots, w_\ell]$ são subespaços de $V \Rightarrow S_1+S_2 = [v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_\ell]$

<u>Dem</u>: $S_1 \subset [v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_\ell]$ pois $v_i \in [v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_\ell]$ $\forall i = 1, \dots, k$

$S_2 \subset [v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_\ell]$ pois $w_j \in [v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_\ell]$ $\forall j = 1, \dots, \ell$

$\Rightarrow S_1+S_2 \subset [v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_\ell]$.

Reciprocamente, se $u \in [v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_\ell] \Rightarrow$

$$\Rightarrow u = \underbrace{(a_1v_1 + \dots + a_kv_k)}_{S_1} + \underbrace{(b_1w_1 + \dots + b_\ell w_\ell)}_{S_2} \in S_1+S_2$$

$\Rightarrow [v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_\ell] \subset S_1+S_2$

$\Rightarrow S_1+S_2 = [v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_\ell]$ ■

<u>Pergunta</u>: Suponha que $S = S_1+S_2$. Quando que a "decomposição" $v = v_1+v_2$, $v_1 \in S_1$, $v_2 \in S_2$ é única?

<u>Exemplo</u>: $P_2(\mathbb{R}) = S_1+S_2$ onde $S_1 = \{p(x) \in P_2(\mathbb{R}) \mid p(1) = 0\}$ e $S_2 = \{p(x) \in P_2(\mathbb{R}) \mid p(-1) = 0\}$.

De fato:

Seja $p(x) = a + bx + cx^2 \in P_2(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow p(x) = \frac{(b-a-c)}{2}(x-1) + c(x^2-1) + \frac{(a+b+c)}{2}(x+1)$$ (Faça a conta!)

Ou seja, se $q_1(x) = \frac{(b-a-c)}{2}(x-1) + c(x^2-1) \in S_1$

$$q_2(x) = \frac{(a+b+c)}{2}(x+1) \in S_2$$

$$\Rightarrow p(x) = q_1(x) + q_2(x) \in S_1 + S_2$$

No entanto, a decomposição NÃO é única:

$p(x) = p_1(x) + p_2(x)$ onde $p_1(x) = \frac{(b-a-c)}{2}(x-1) \in S_1$

$$p_2(x) = \frac{(a+b+c)}{2}(x+1) + c(x^2-1) \in S_2$$

Prop: Seja $S = S_1 + S_2$. A decomposição de um vetor $v \in S$ com $v = v_1 + v_2$ com $v_1 \in S_1$, $v_2 \in S_2$ é única $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 = \{0\}$

Dem: ($\Leftarrow$) Suponha que $S_1 \cap S_2 = \{0\}$ e seja $v \in S_1 + S_2$

suponha que $v = v_1 + v_2$ e $v = w_1 + w_2$ com $v_1, w_1 \in S_1$, $v_2, w_2 \in S_2$

$$\Rightarrow v - v = 0 = (v_1 - w_1) + (v_2 - w_2)$$

$$\Rightarrow (v_1 - w_1) = (w_2 - v_2) \Rightarrow \begin{array}{l} v_1 - w_1 \in S_1 \cap S_2 \\ w_2 - v_2 \in S_1 \cap S_2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} v_1 = w_1 \\ v_2 = w_2 \end{array}$$

($\Rightarrow$) Suponha que a decomposição $v = v_1 + v_2$ é única para todo $v \in S_1 + S_2$.

Suponha que $v \in$ $v \in S_1 \cap S_2$

$$\Rightarrow v = \underset{\substack{\uparrow \\ S_1}}{v} + \underset{\substack{\uparrow \\ S_2}}{0} = \underset{\substack{\uparrow \\ S_1}}{0} + \underset{\substack{\uparrow \\ S_2}}{v} \underset{\text{(unicidade)}}{\Longrightarrow} v = 0 \Rightarrow S_1 \cap S_2 = \{0\}$$

$\blacksquare$

Def: Dizemos que uma soma de subespaços $S_1 + S_2$ é uma **soma direta** se $S_1 \cap S_2 = \{0\}$. Nesse caso, escrevemos $S_1 \oplus S_2$ para enfatizar que a soma é direta.

Ou seja: Denotamos o subespaço $S_1 + S_2$ por $S_1 \oplus S_2$ quando $S_1 \cap S_2 = \{0\}$.

Exemplo: Lembre que a transposta de uma matriz $m \times n$ é uma matriz $n \times m$ onde as linhas são trocadas pelas colunas, i.e.

Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times n}$

$$\Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times m}.$$

Exemplo

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- Uma matriz $n \times n$ é <u>simétrica</u> se $A = A^T$
- Uma matriz $n \times n$ é <u>anti-simétrica</u> se $A = -A^T$

Exemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ é Simétrica

$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ é Anti-simétrica

- $\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n} \mid A = A^T\} \subset \mathcal{M}_{n\times n}$ é subespaço
- $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n} \mid A = -A^T\} \subset \mathcal{M}_{n\times n}$ é subespaço

(*)

(*) <u>Exercício</u>: Mostre que $T : \mathcal{M}_{n\times n} \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times n}$, $A \longmapsto \frac{1}{2}(A + A^T)$ é linear e que $\mathrm{Im}(T) = \mathcal{S}$, $N(T) = \mathcal{A}$.

Note que:

(i) $\mathcal{M}_{n\times n} = \mathcal{S} + \mathcal{A}$ pois se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$

$$\Rightarrow A = \underbrace{\tfrac{1}{2}(A + A^T)}_{\mathcal{S}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(A - A^T)}_{\mathcal{A}}$$

(ii) $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{0\}$

Logo $\mathcal{M}_{n\times n} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$;

Qualquer matriz quadrada pode se escrita de maneira única como uma soma de uma matriz simétrica e uma anti-simétrica.