Aula 5

Lembre que:

- Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial.
- Um subespaço vetorial de V é um subconjunto $S \subset V$ tal que

  (i) $0 \in S$

  (ii) $v, w \in S \Rightarrow v + w \in S$

  (iii) $v \in S$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda v \in S$.

- Subespaços são generalizações de planos e retas passando pela origem
- Vamos generalizar o conceito de vetores diretores

Def: Seja V um espaço vetorial e $v_1, \dots, v_k \in V$. Uma combinação linear de $v_1, \dots, v_k$ é

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k \in V$$

onde $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$.

Prop: Sejam $v_1, \dots, v_k \in V$. Seja

$$S = \{a_1 v_1 + \dots + a_k v_k \mid a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}\}$$

o conjunto de todas as combinações lineares de $v_1, \dots, v_k$. Então $S \subset V$ é um subespaço vetorial.

Dem: • $0 \in S$ pois $0 = 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 v_k$ $(a_1 = \cdots = a_k = 0)$

• $u, w \in S \Rightarrow u = b_1 v_1 + \cdots + b_k v_k$

$w = c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k$

$\Rightarrow u + w = (b_1 + c_1) v_1 + \cdots + (b_k + c_k) v_k \in S$

• $u \in S$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda u = (\lambda b_1) v_1 + \cdots + (\lambda b_k) v_k \in S$. ∎

Notação / Terminologia:

• $S = \{ a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k \mid a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R} \}$ é o

subespaço gerado por $v_1, \ldots, v_k$

• Escrevemos $[v_1, \ldots, v_k]$ para o subespaço gerado por $v_1, \ldots, v_k$, i.e.,

$$[v_1, \ldots, v_k] = \{ a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k \mid a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R} \},$$

• Se $S \subset V$ é um subespaço, dizemos que $v_1, \ldots, v_k$ são geradores de S se

$$S = [v_1, \ldots, v_k]$$

Exemplos

1. $\mathbb{R}^3$ é gerado por e_1, e_2, e_3 onde

$$e_1 = (1,0,0), \quad e_2 = (0,1,0), \quad e_3 = (0,0,1)$$

pois $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \iff (x,y,z) = x e_1 + y e_2 + y e_3$

(2) $S = \{(x+y, x-y, 2x) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ é gerado por $u = (1,1,2)$ e $v = (1,-1,0)$

Vamos mostrar que $S = [u,v]$:

(i) $[u,v] \subset S$:

Seja $w \in [u,v] \Rightarrow w = xu + yv$, $x, y \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow w = x(1,1,2) + y(1,-1,0) = (x,x,2x) + (y,-y,0)$$
$$= (x+y, x-y, 2x) \in S$$

(ii) $S \subset [u,v]$

Se $w \in S \Rightarrow w = (x+y, x-y, 2x)$ para algum $x, y \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow w = (x,x,2x) + (y,-y,0) = x(1,1,2) + y(1,-1,0) = xu + yv \in S$$

//

(3) $S = \{p(x) \in P_2(\mathbb{R}) \mid p(1) = 0\}$ é gerado por $(x-1)$, (x^2-1)

Vamos mostrar que $[(x-1),(x^2-1)] = S$:

(i) $[(x-1),(x^2-1)] \subset S$:

Se $p(x) \in [x-1, x^2-1] \Rightarrow p(x) = a(x-1) + b(x^2-1)$

$$\Rightarrow p(1) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0 \Rightarrow p(x) \in S$$

(ii) $S \subset [x-1, x^2-1]$:

Suponha que $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in S$

$\iff a_0 + a_1 + a_2 = 0 \iff a_0 = -(a_1 + a_2)$

Logo, $p(x) \in S \Rightarrow p(x) = -(a_1+a_2) + a_1 x + a_2 x^2$

$= a_1(x-1) + a_2(x^2-1) \in [x-1, x^2-1]$ //

• <u>Relação com Sistemas de Equações Lineares</u>

Sejam $v_1, \dots, v_k, w \in \mathbb{R}^n$. Uma pergunta natural é se $w \in [v_1, \dots, v_k]$, ou seja, se w pode ser escrita como uma combinação linear de $v_1, \dots, v_k$.

Este problema é equivalente ao problema de determinar se um sistema de equações lineares com n-equações e k-incógnitas é possível ou impossível (se admite ou não solução).

Exemplo: Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ o plano que passa pela origem e tem como vetores diretores os vetores $u = (1,-1,0)$, $v = (0,1,1)$. Determine se

$w_1 = (-3, 5, 2)$
$w_2 = (1, 1, 1)$ pertencem à S.

Solução:

- $w_1 \in S \iff \exists x, y \in \mathbb{R}$ t.q. $w_1 = xu + yv \iff$

$\iff \exists x, y \in \mathbb{R}$ t.q. $(-3,5,2) = x(1,-1,0) + y(0,1,1) \iff$

$\iff \exists x, y \in \mathbb{R}$ t.q. $(-3,5,2) = (x, -x+y, y) \iff$

$\iff$ o sistema $\begin{cases} x = -3 \\ -x+y = 5 \\ y = 2 \end{cases}$ é possível

Mas, $x=-3$, $y=2$ é solução do sistema

$\Rightarrow w_1 \in S$. $\quad (w_1 = -3u + 2v)$

- $w_2 \in S \iff \exists x, y \in \mathbb{R}$ t.q. $w_2 = xu + yv$

$\iff \exists x, y \in \mathbb{R}$ t.q. $(1,1,1) = x(1,-1,0) + y(0,1,1)$

$\iff \exists x, y \in \mathbb{R}$ t.q. $(1,1,1) = (x, -x+y, y)$

$\iff$ o sistema $\begin{cases} x = 1 \\ -x+y = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ é possível

Mas, se o sistema fosse possível $\Rightarrow 0 = 1$ Absurdo

$\Rightarrow$ o sistema é impossível $\Rightarrow w_2 \notin S$

Pergunta: Seja V um espaço vetorial, $v_1, \dots, v_k \in V$, $S \subset V$ um subespaço. Como determinar se $[v_1, \dots, v_k] \subset S$?

Prop: Se $S \subset V$ é um subespaço e $v_1, \dots, v_k \in V$ então $[v_1, \dots, v_k] \subset S \iff v_i \in S \quad \forall\, i = 1, \dots, k$

Dem: $(\Rightarrow)$

Note que $v_i \in [v_1, \dots, v_k] \quad \forall i$ pois

$$v_i = 0 \cdot v_1 + 0\, v_2 + \cdots + 0\, v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \cdots + 0 \cdot v_k$$

$a_1 = a_2 = \cdots = a_{i-1} = a_{i+1} = \cdots = a_k = 0$
$a_i = 1$

Logo $[v_1, \dots, v_k] \subset S \Rightarrow v_i \in S \quad \forall i$.

$(\Leftarrow)$ Suponha que $v_1, \dots, v_k \in S$, e seja $w \in [v_1, \dots, v_k]$. Temos que mostrar que $w \in S$.

mas $w = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k \in S$ pois S é subespaço. ∎

Consequências:

1) $[v_1, \dots, v_k]$ é o menor subespaço de V que contém os vetores $v_1, \dots, v_k$

2) Se $v_1,\dots,v_k, w_1,\dots,w_\ell \in V$ então $[v_1,\dots,v_k] = [w_1,\dots,w_\ell]$

$\iff$ $v_1,\dots,v_k \in [w_1,\dots,w_\ell]$ e $w_1,\dots,w_\ell \in [v_1,\dots,v_k]$.

Exemplo:

$V = \mathbb{R}^4$, $v_1 = (1,-1,0,1)$, $v_2 = (0,1,1,0)$, $v_3 = (1,0,1,1)$

$w_1 = (1,1,2,1)$, $w_2 = (2,-1,1,2)$

Pergunta: $[v_1,v_2,v_3] = [w_1,w_2]$?

(i) Vamos ver se $[v_1,v_2,v_3] \subset [w_1,w_2]$. Para isso, temos que verificar se $v_1, v_2, v_3 \in [w_1,w_2]$:

- $v_1 \in [w_1,w_2] \iff \exists\, x,y \in \mathbb{R}$ t.q. $v_1 = xw_1 + yw_2 \iff$ o sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 1 & (1) \\ x - y = -1 & (2) \\ 2x + y = 0 & (3) \\ x + 2y = 1 & (4) \end{cases}$$ é possível

Mas: $(3) \Rightarrow y = -2x$

$(2) \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}$

Vamos verificar se isto é solução do sistema:

(1): $-\frac{1}{3} + 2\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{3}{3} = 1$ ✓

(2): $-\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{3}{3} = -1$ ✓

(3): $2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3} = 0$ ✓ $\Rightarrow v_1 \in [w_1,w_2]$.

(4): $-\frac{1}{3} + 2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{3} = 1$ ✓

- $v_2 \in [w_1, w_2] \Leftrightarrow \exists\, x, y \in \mathbb{R}$ t.q. $v_2 = x w_1 + y w_2 \Leftrightarrow$ o sistema 8

$$\begin{cases} x + 2y = 0 & (1) \\ x - y = 1 & (2) \\ 2x + y = 1 & (3) \\ x + 2y = 0 & (4) \end{cases}$$ é possível

Mas, $(1) \Rightarrow x = -2y$

$(2) \Rightarrow -3y = 1 \Rightarrow y = \frac{-1}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

Vamos verificar se isto é solução do sistema:

(1): $\frac{2}{3} + 2\left(\frac{-1}{3}\right) = 0$ ✓

(2): $\frac{2}{3} - \left(\frac{-1}{3}\right) = 1$ ✓

(3): $2\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{3}{3} = 1$ ✓

(4): $\frac{2}{3} + 2\left(\frac{-1}{3}\right) = 0$ ✓

$\Rightarrow v_2 \in [w_1, w_2]$

- $v_3 \in [w_1, w_2] \Leftrightarrow \exists\, x, y \in \mathbb{R}$ t.q. $v_3 = x w_1 + y w_2 \Leftrightarrow$ o sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 1 & (1) \\ x - y = 0 & (2) \\ 2x + y = 1 & (3) \\ x + 2y = 1 & (4) \end{cases}$$ é possível

mas $(2) \Rightarrow x = y$, $(1) \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = y = \frac{1}{3}$. Vamos verificar se é solução:

(1): $\frac{1}{3} + 2\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ ✓

(2): $\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$ ✓

(3): $2\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} = 1$ ✓

(4): $\frac{1}{3} + 2\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ ✓

$\Rightarrow v_3 \in [w_1, w_2] \Rightarrow [v_1, v_2, v_3] \subset [w_1, w_2]$

(ii) Vamos verificar se $[w_1, w_2] \subset [v_1, v_2, v_3]$. Para isso, temos que verificar se $w_1, w_2 \in [v_1, v_2, v_3]$

- $w_1 \in [v_1, v_2, v_3] \iff \exists\, x, y, z \in \mathbb{R}$ tq. $w_1 = xv_1 + yv_2 + zv_3 \iff$

o sistema
$$\begin{cases} x + z = 1 & (1) \\ -x + y = 1 & (2) \\ y + z = 2 & (3) \\ x + z = 1 & (4) \end{cases}$$
é possível

mas, $(1) \Rightarrow x = 1 - z$

$(2) \Rightarrow -1 + z + y = 1 \Rightarrow y = 2 - z \Rightarrow$ $x = 1 - z$, $y = 2 - z$, z é arbitrário

$(3) \Rightarrow 2 - z + z = 2$ ✓

$\Rightarrow (z = 0)$, $x = 1, y = 2, z = 0$ é uma solução do sistema

Vamos verificar se é solução:

(1): $1 = 1$ ✓

(2): $-1 + 2 = 1$ ✓

(3): $2 = 2$ ✓

(4): $1 = 1$ ✓

$\Longrightarrow w_1 \in [v_1, v_2, v_3]$

- $w_2 \in [v_1, v_2, v_3] \iff \exists\, x, y, z \in \mathbb{R}$ tq. $w_2 = xv_1 + yv_2 + zv_3 \iff$

o sistema
$$\begin{cases} x + z = 2 & (1) \\ -x + y = -1 & (2) \\ y + z = 1 & (3) \\ x + z = 2 & (4) \end{cases}$$
é possível

<u>Solução</u>: $x = 2 - z \Rightarrow z - 2 + y = -1 \Rightarrow y = 1 - z$ z arbitrário

$\Rightarrow (z = 0)$ $x = 2, y = 1, z = 0$ é uma solução

(1)✓, (2)✓, (3)✓, (4)✓

$\Rightarrow w_2 \in [v_1, v_2, v_3] \Rightarrow w_1, w_2 \in [v_1, v_2, v_3] \Rightarrow [w_1, w_2] \subset [v_1, v_2, v_3]$

Logo $[v_1, v_2, v_3] = [w_1, w_2]$