Aula 4: Subespaços vetoriais

Def: Um sobconjunto $S \subset V$ é um subespaço vetorial (ou subespaço) se

(i) $0 \in S$ $\quad (0 = \vec{0}_V)$

(ii) $u, v \in S \Rightarrow u+v \in S$

(iii) $u \in S,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda u \in S$

OBS: se $S \subset V$ é subespaço vetorial, então a soma e o produto por escalar de V induzem uma estrutura de espaço vetorial em S.

Exemplos:

(0) $\{0\} \subset V$, $\quad V \subset V$ são subespaços vetoriais

(1) $S \subset \mathbb{R}^3$, $\quad S = \{(x+y, x-y, 2x) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

(i) $(0,0,0) \in S$ $\quad$ (tome $x=0, y=0$)

(ii) Seja $u = (x_1+y_1, x_1-y_1, 2x_1) \in S$, $\quad v = (x_2+y_2, x_2-y_2, 2x_2) \in S$

$$\Rightarrow u+v = \Big(\underbrace{(x_1+x_2)}_{x} + \underbrace{(y_1+y_2)}_{y}, \underbrace{(x_1+x_2)}_{x} - \underbrace{(y_1+y_2)}_{y}, 2\underbrace{(x_1+x_2)}_{x}\Big) \in S$$

(iii) Seja $u = (x+y, x-y, 2x) \in S$, $\quad \lambda \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \lambda u = (\lambda(x+y), \lambda(x-y), \lambda 2x) = (\lambda x + \lambda y, \lambda x - \lambda y, 2\lambda x) \in S$$

2. Seja $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ e $S = \{\lambda \vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow$ S é subespaço pois

(i) $\vec{0} \in S$ $(\lambda = 0)$

(ii) $\lambda \vec{u} + \mu \vec{u} = (\lambda + \mu)\vec{u} \in S$

(iii) $\alpha(\lambda \vec{u}) = (\alpha\lambda)\vec{u} \in S$

OBS: Os subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$ são:

- $\{0\}$
- Retas passando pela origem
- Planos passando pela origem
- $\mathbb{R}^3$

OBS: Se $r \subset \mathbb{R}^3$ é uma reta $\Rightarrow$ $r = p + s$ onde $p \in \mathbb{R}^3$ e $s \subset \mathbb{R}^3$ é uma reta passando pela origem (um subespaço vetorial).

Aqui, se $p = (p_1, p_2, p_3)$ então

$$p + s = \{(p_1 + x, p_2 + y, p_3 + z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) \in s\}$$

- Para ver isso, seja $r: X = P + \lambda \vec{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ uma equação vetorial da reta r.

$\Rightarrow$ $r = P + s$ onde $s: X = \lambda \vec{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ é uma reta passando pela origem (exemplo 2 acima)

3 Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ e seja $S \subset \mathbb{R}^3$ dado por

$$S = \{\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

$\Rightarrow$ S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$

(Se $\vec{u}, \vec{v}$ são L.I. $\Rightarrow$ S é um plano passando pela origem)

Vamos mostrar que S é um subespaço vetorial

- $0 \in S$ pois $0 = 0 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{v}$ $\quad (\lambda = \mu = 0)$
- Se $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in S \Rightarrow \vec{w}_1 = \lambda_1 \vec{u} + \mu_1 \vec{v}, \quad \vec{w}_2 = \lambda_2 \vec{u} + \mu_2 \vec{v}$

  $\Rightarrow \vec{w}_1 + \vec{w}_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)\vec{u} + (\mu_1 + \mu_2)\vec{v} \in S$
- Se $\vec{w} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in S$, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow$

  $\alpha \vec{w} = (\alpha \lambda)\vec{u} + (\alpha \mu)\vec{v} \in S$

<u>OBS</u>: Se $\pi \subset \mathbb{R}^3$ é um plano $\Rightarrow \pi = P + S$ onde $P \in \mathbb{R}^3$, $S \subset \mathbb{R}^3$ é um plano que passa pela origem (um subespaço vetorial)

4 Seja $T: V \to W$ linear. Então $N(T) \subset V$ é um subespaço:

(i) $\vec{0}_V \in N(T)$ pois $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$

(ii) Se $v_1, v_2 \in N(T) \Rightarrow T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = \vec{0}_W + \vec{0}_W = \vec{0}_W$

$\Rightarrow v_1 + v_2 \in N(T)$

(iii) Se $v \in N(T)$ e $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda \vec{0}_W \underset{(*)}{=} \vec{0}_W$$

$\Rightarrow \lambda v \in N(T)$

(*) $\lambda \vec{0}_W = \lambda (0 \cdot \vec{0}_W) = (\lambda \cdot 0) \cdot \vec{0}_W = 0 \cdot \vec{0}_W = \vec{0}_W$

5 Se $T: V \to W$ é linear $\Rightarrow Im(T) \subset W$ é um sobespaço

(i) $\vec{0}_W \in Im(T)$ pois $\vec{0}_W = T(\vec{0}_V)$

(ii) Se $w_1, w_2 \in Im(T) \Rightarrow w_1 = T(v_1), w_2 = T(v_2)$ para algum $v_1, v_2 \in V$

$\Rightarrow w_1 + w_2 = T(v_1) + T(v_2) = T(v_1 + v_2)$

$\Rightarrow w_1 + w_2 \in Im\, T$

(iii) Se $w \in Im(T)$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow w = T(v)$ p/ algum $v \in V$

$\Rightarrow \lambda w = \lambda T(v) = T(\lambda v) \Rightarrow \lambda w \in Im\, T$

6 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ NÃO é subespaço: $1 \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ mas $\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

7 $S = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ NÃO é um subespaço vetorial

$(2,4) \in S$, $\lambda = 2 \in \mathbb{R}$ mas $2 \cdot (2,4) = (4,8) \notin S$

pois $8 \neq 4^2$

8. $S = \{p(x) \in P_2(\mathbb{R}) \mid p(1) = 0\} \subset P_2(\mathbb{R})$ é um subespaço vetorial

- $0 \in S$ (aqui $0 = 0 + 0x + 0x^2$ é o polinômio 0)

  pois $0(1) = 0$

- $p(x), q(x) \in S \Rightarrow p(1) = 0, \; q(1) = 0$

  $\Rightarrow (p+q)(1) = p(1) + q(1) = 0 \Rightarrow p(x) + q(x) \in S$

- $p(x) \in S, \; \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda p(x) \in S$

  pois $\lambda p(1) = \lambda \cdot 0 = 0$

<u>Def</u>: Seja V um espaço vetorial e $v_1, \dots, v_k \in V$.
Uma <u>combinação linear de $v_1, \dots, v_k$</u> é

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k \in V$$

onde $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$.

<u>Prop</u>: Sejam $v_1, \dots, v_k \in V$. Seja

$$S = \{a_1 v_1 + \dots + a_k v_k \mid a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}\}$$

o conjunto de todas as combinações lineares de $v_1, \dots, v_k$.
Então $S \subset V$ é um subespaço vetorial.

Dem: • $0 \in S$ pois $0 = 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 v_k$ $(a_1 = \cdots = a_k = 0)$

• $u, w \in S \Rightarrow u = b_1 v_1 + \cdots + b_k v_k$

$w = c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k$

$\Rightarrow u + w = (b_1 + c_1) v_1 + \cdots + (b_k + c_k) v_k \in S$

• $u \in S$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda u = (\lambda b_1) v_1 + \cdots + (\lambda b_k) v_k \in S$. $\blacksquare$

Notação / Terminologia:

• $S = \{a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k \mid a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}\}$ é o

subespaço gerado por $v_1, \ldots, v_k$

• Escrevemos $[v_1, \ldots, v_k]$ para o subespaço gerado por $v_1, \ldots, v_k$, i.e.,

$$[v_1, \ldots, v_k] = \{a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k \mid a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}\}.$$

• Se $S \subset V$ é um subespaço, dizemos que $v_1, \ldots, v_k$ são geradores de S se

$$S = [v_1, \ldots, v_k]$$

Exemplos

1. $\mathbb{R}^3$ é gerado por e_1, e_2, e_3 onde

$$e_1 = (1,0,0), \quad e_2 = (0,1,0), \quad e_3 = (0,0,1)$$

pois $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow (x,y,z) = x e_1 + y e_2 + y e_3$

2. $S = \{(x+y, x-y, 2x) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ é gerado por $u = (1,1,2)$ e $v = (1,-1,0)$

Vamos mostrar que $S = [u,v]$:

(i) $[u,v] \subset S$:

Seja $w \in [u,v] \Rightarrow w = xu + yv$, $x, y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow w = x(1,1,2) + y(1,-1,0) = (x, x, 2x) + (y, -y, 0)$
$= (x+y, x-y, 2x) \in S$

(ii) $S \subset [u,v]$

Se $w \in S \Rightarrow w = (x+y, x-y, 2x)$ para algum $x, y \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow w = (x, x, 2x) + (y, -y, 0) = x(1,1,2) + y(1,-1,0) = xu + yv \in S$ //

3. $S = \{p(x) \in P_2(\mathbb{R}) \mid p(1) = 0\}$ é gerado por $(x-1)$, (x^2-1)

Vamos mostrar que $[(x-1), (x^2-1)] = S$:

(i) $[(x-1), (x^2-1)] \subset S$:

Se $p(x) \in [x-1, x^2-1] \Rightarrow p(x) = a(x-1) + b(x^2-1)$

$\Rightarrow p(1) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0 \Rightarrow p(x) \in S$

(ii) $S \subset [x-1, x^2-1]$:

suponha que $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in S$

$\Leftrightarrow a_0 + a_1 + a_2 = 0 \Leftrightarrow a_0 = -(a_1 + a_2)$

Logo, $p(x) \in S \Rightarrow p(x) = -(a_1+a_2) + a_1 x + a_2 x^2$

$= a_1(x-1) + a_2(x^2-1) \in [x-1, x^2-1]$ //