Aula 3:

Lembre que:

Def: Sejam $(V,+,\cdot)$ e $(W,+,\cdot)$ espaços vetoriais.
Uma transformação linear de V para W é uma função $T: V \to W$ que satisfaz:

- $T(v_1+v_2) = T(v_1)+T(v_2) \quad \forall v_i \in V$
- $T(\lambda v) = \lambda T(v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

- Uma transformação linear bijetora é um isomorfismo
- $V \cong W$ (V e W são isomorfos) se existe um isomorfismo $T: V \to W$

Exemplo: $P_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n+1}$

$$T(a_0 + \cdots + a_n x^n) = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

- Pergunta: Como saber se uma transformação linear $T: V \to W$ é injetora?

Note que:

Se existir $v \in V$, $v \neq \vec{0}_V$ tal que $T(v) = \vec{0}_W$

$\Rightarrow$ T NÃO é injetora pois já sabemos que $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$

Isso sugere considerar o seguinte conjunto:

Def: Seja $T: V \to W$ uma transformação linear. O <u>núcleo de T</u> é o conjunto

$$N(T) = \{ v \in V \mid T(v) = \underset{\text{vetor } \vec{0} \text{ do espaço } W}{0} \} \subseteq V$$

Prop: Uma transformação linear $T: V \to W$ é injetora se e somente se $N(T) = \{\underset{\vec{0}_V}{0}\}$

Dem: ($\Rightarrow$) Suponha que T é injetora.

Seja $v \in N(T)$ $\Rightarrow$ $T(v) = \underset{\vec{0}_W}{0} = T(\underset{\vec{0}_V}{0})$. Logo $v = \underset{\vec{0}_V}{0}$

$\Rightarrow N(T) = \{\underset{\vec{0}_V}{0}\}$

($\Leftarrow$) Suponha que $N(T) = \{0\}$. Sejam $v_1, v_2 \in V$ tais que $T(v_1) = T(v_2)$

$$\Rightarrow \underset{\vec{0}_W}{0} = T(v_1) - T(v_2) \underset{T \text{ é linear}}{=} T(v_1 - v_2) \overset{\text{Def. de } N(T)}{\Rightarrow} v_1 - v_2 \in N(T) \overset{N(T)=\{0\}}{\Rightarrow} v_1 - v_2 = \underset{\vec{0}_V}{0}$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2$$

Logo, $T(v_1) = T(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$. Ou seja, T é injetora ■

Exemplo:

1. Seja $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x,y) = (x+y, x-y, 2x)$.

Então T é injetora:

$$N(T) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+y, x-y, 2x) = (0,0,0) \}$$

ou seja, $(x,y) \in N(T) \iff \begin{cases} x+y=0 & (1) \\ x-y=0 & (2) \\ 2x=0 & (3) \end{cases}$ $\qquad$ $(3) \Rightarrow x = 0$, $(2) \Rightarrow y = 0$

Logo, $(x,y) \in N(T) \iff (x,y) = (0,0)$. Em outras palavras, $N(T) = \{(0,0)\} \Rightarrow T$ é injetora

<u>OBS</u>: (Interpretação Geométrica)

$Im(T) \subset \mathbb{R}^3$ é um "subespaço de $\mathbb{R}^3$" (Será definido depois) e $T: \mathbb{R}^2 \to Im(T) \subset \mathbb{R}^3$ é uma bijeção linear. Logo, $Im(T)$ é um plano em $\mathbb{R}^3$ (Uma forma de colocar "$\mathbb{R}^2$ dentro de $\mathbb{R}^3$")

De fato, já vimos que

$Im(T)$ é um plano que passa pela origem e tem vetores diretores $\vec{u} = (1,1,2)$, $\vec{v} = (1,-1,0)$

<u>OBS</u>: Note que $T(1,0) = \vec{u}$, $T(0,1) = \vec{v}$

② $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y,z) = (x+y+z, x-y+z)$

NÃO é injetora

$$N(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x+y+z, x-y+z) = (0,0)\}$$

Em outras palavras,

$$(x,y,z) \in N(T) \iff \begin{cases} x+y+z = 0 & (1) \\ x-y+z = 0 & (2) \end{cases} \iff \begin{array}{l} x = -z \\ y = 0 \end{array} \quad (z \text{ arbitrário})$$

Logo, $N(T) = \{\lambda(-1,0,1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ é uma reta que passa pela origem de $\mathbb{R}^3$ e tem vetor diretor $(-1,0,1)$. Em particular, $N(T) \neq \{0\}$ e T NÃO é injetora

APLICAÇÃO P/ CÁLCULO : Constante de Integração

Sejam
- $V = C^1([a,b], \mathbb{R}) = \{F : [a,b] \to \mathbb{R} \mid F' : [a,b] \to \mathbb{R}$ existe e é contínua$\}$

- $W = C([a,b], \mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f$ é contínua$\}$

- $T = D : C^1([a,b], \mathbb{R}) \longrightarrow C([a,b], \mathbb{R})$

$$D(F) = F'$$

- D é linear (Mostre Isso!)
- D é sobrejetora: Sabemos que toda função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável.

Pelo teorema fundamental do cálculo temos que:

Dado $f \in C([a,b], \mathbb{R})$, se $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

$\Rightarrow D(F) = f \quad \Rightarrow$ D é sobrejetora

- D **NÃO** é injetora

$$\begin{aligned} N(D) &= \{F \in C^1([a,b], \mathbb{R}) \mid D(F) = 0\} \\ &= \{F \in C^1([a,b], \mathbb{R}) \mid F'(x) = 0 \ \forall x \in [a,b]\} \\ &= \{\text{Funções constantes de } [a,b] \text{ em } \mathbb{R}\} \\ &\cong \mathbb{R} \end{aligned}$$

OBS: O Fato que $N(D) \cong \mathbb{R}$ explica o pq de termos que considerar a constante de integração quando definimos a integral.

- D NÃO admite uma inversa pois não é injetora
- A ambiguidade na hora de tentar definir uma inversa vem do fato que

$$N(D) \cong \mathbb{R} : \quad \text{se} \quad D(F) = D(G) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D(F) - D(G) = 0 \Rightarrow D(F-G) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F - G \in N(D) \Rightarrow F - G \text{ é uma função constante}$$

Logo, a primitiva de uma função $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ só está definida a menos de uma constante $c \in \mathbb{R}$.

- Subespaços vetoriais

$N(T)$ e $Im(T)$ são exemplos de subespaços vetoriais. Estes são generalizações de retas e planos passando pela origem.

Def: Um sobconjunto $S \subset V$ é um <u>subespaço vetorial</u> (ou subespaço) se

(i) $0 \in S$ $\quad (0 = \vec{0}_V)$

(ii) $u, v \in S \Rightarrow u+v \in S$

(iii) $u \in S,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda u \in S$

Exemplos:

(0) $\{0\} \subset V$, $\quad V \subset V$ são sobespaços vetoriais

(1) $S \subset \mathbb{R}^3$, $\quad S = \{(x+y, x-y, 2x) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

(i) $(0,0,0) \in S$ $\quad$ (tome $x=0, y=0$)

(ii) Seja $u = (x_1+y_1, x_1-y_1, 2x_1) \in S$, $\quad v = (x_2+y_2, x_2-y_2, 2x_2) \in S$

$$\Rightarrow u+v = (\underbrace{(x_1+x_2)}_{x} + \underbrace{(y_1+y_2)}_{y}, \underbrace{(x_1+x_2)}_{x} - \underbrace{(y_1+y_2)}_{y}, 2\underbrace{(x_1+x_2)}_{x}) \in S$$

(iii) Seja $u = (x+y, x-y, 2x) \in S$, $\quad \lambda \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \lambda u = (\lambda(x+y), \lambda(x-y), \lambda 2x) = (\lambda x + \lambda y, \lambda x - \lambda y, 2\lambda x) \in S$$

(2) Seja $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ e $S = \{\lambda \vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow S$ é subespaço pois

(i) $\vec{0} \in S$ $\quad (\lambda = 0)$

(ii) $\lambda \vec{u} + \mu \vec{u} = (\lambda + \mu)\vec{u} \in S$

(iii) $\alpha(\lambda \vec{u}) = (\alpha \lambda)\vec{u} \in S$

3. Seja $T: V \to W$ linear. Então $N(T) \subset V$ é um subespaço:

(i) $\vec{0}_V \in N(T)$ pois $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$

(ii) Se $v_1, v_2 \in N(T) \Rightarrow T(v_1+v_2) = T(v_1)+T(v_2) = \vec{0}_W + \vec{0}_W = \vec{0}_W$

$\Rightarrow v_1+v_2 \in N(T)$

(iii) Se $v \in N(T)$ e $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda \vec{0}_W \underset{(*)}{=} \vec{0}_W$$

$\Rightarrow \lambda v \in N(T)$

$(*)$ $\lambda \vec{0}_W = \lambda (0 \cdot \vec{0}_W) = (\lambda \cdot 0) \cdot \vec{0}_W = 0 \cdot \vec{0}_W = \vec{0}_W$

4. Se $T: V \to W$ é linear $\Rightarrow \mathrm{Im}(T) \subset W$ é um subespaço

(i) $\vec{0}_W \in \mathrm{Im}(T)$ pois $\vec{0}_W = T(\vec{0}_V)$

(ii) Se $w_1, w_2 \in \mathrm{Im}(T) \Rightarrow w_1 = T(v_1), w_2 = T(v_2)$ para algum $v_1, v_2 \in V$

$\Rightarrow w_1 + w_2 = T(v_1) + T(v_2) = T(v_1+v_2)$

$\Rightarrow w_1 + w_2 \in \mathrm{Im}\, T$

(iii) Se $w \in \mathrm{Im}(T)$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow w = T(v)$ p/ algum $v \in V$

$\Rightarrow \lambda w = \lambda T(v) = T(\lambda v) \Rightarrow \lambda w \in \mathrm{Im}\, T$

5. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ NÃO é subespaço: $1 \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ mas $\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$