Aula 2

• Transformação Linear:

Def: Sejam $(V,+,\cdot)$ e $(W,+,\cdot)$ espaços vetoriais.
Uma transformação linear de V para W é uma função $T: V \to W$ que satisfaz:

- $T(v_1+v_2) = T(v_1)+T(v_2) \quad \forall v_i \in V$
- $T(\lambda v) = \lambda T(v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Exemplos

① $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$T(x,y) = (x+y,\ x-y,\ 2x)$$

OBS: $\operatorname{Im} T$ é um plano que passa pela origem com vetores diretores $(1,1,2)$ e $(1,-1,0)$

② $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$T(x,y,z) = 2x-y+z$$

OBS: $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x,y,z) = 0\}$ é um plano com equação geral $2x-y+z=0$

③ $D: C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow C(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$D(f) = f'$$

(Muitos Outros Exemplos!)

Prop: Se $T: V \to W$ é uma transformação linear então $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$

Dem: $\vec{0}_V = 0 \cdot v$, $v \in V$

$$\Rightarrow T(\vec{0}_V) = T(0 \cdot v) = 0 \cdot T(v) = \vec{0}_W \quad \blacksquare$$

Exemplo:

1. $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (x-y+2,\ y+1)$

NÃO É LINEAR pois $T(0,0) = (2,1) \neq (0,0)$

2. $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$T(x,y) = (x+y^2,\ x)$ satisfaz $T(0,0) = (0,0)$, mas
NÃO É LINEAR

$$T(\lambda(x,y)) = T(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x + \lambda^2 y^2,\ \lambda x) = \lambda(x + \lambda y^2,\ x)$$

mas $\lambda T(x,y) = \lambda(x+y^2, x) = (\lambda x + \lambda y^2,\ \lambda x)$

Ou seja Não é verdade que $T(\lambda(x,y)) = \lambda T(x,y)$
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$: Por exemplo, $\lambda = 2$, $x=0$, $y=1$
$2 \cdot (0,1) = (0,2)$, $T(0,2) = (4,0)$, $2 \cdot T(0,1) = 2(1,0) = (2,0) \neq (4,0)$

3. Note que $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = e^x$ NÃO é linear, (Pois $T(0) = 1 \neq 0$), mas

$$T: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \quad \text{(Exemplo 3 da página 2 da Aula 1)}$$
$$x \longmapsto e^x \quad \text{é linear}$$

Vamos verificar isso:

- $T(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = e^x \boxplus e^y = T(x) \boxplus T(y)$ ✓
- $T(\lambda x) = e^{\lambda x} = (e^x)^\lambda = \lambda \boxdot e^x = \lambda \boxdot T(x)$ ✓

Prop: Seja $T: V \to W$ uma transformação linear bijetora. Então $T^{-1}: W \to V$ é linear.

Dem: Seja $w_1 = T(v_1)$, $w_2 = T(v_2)$ (Lembre que T é sobrejetora!)

$$\Rightarrow T^{-1}(w_1 + w_2) = T^{-1}(T(v_1) + T(v_2)) \underset{T \text{ é linear}}{=} T^{-1}(T(v_1 + v_2)) \underset{T^{-1} \circ T = Id_V}{=} v_1 + v_2 =$$

$$= T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2) \checkmark$$

$$T^{-1}(\lambda w) \underset{w = T(v)}{=} T^{-1}(\lambda T(v)) \underset{T \text{ linear}}{=} T^{-1}(T(\lambda v)) \underset{T^{-1} \circ T = Id_V}{=} \lambda v = \lambda T^{-1}(w) \checkmark$$

Def: Uma transformação linear bijetora $T: V \to W$ é um <u>isomorfismo</u>. Se existir um isomorfismo $T: V \to W$ dizemos que V e W são <u>isomorfos</u> e escrevemos $V \cong W$

Exemplos:

1. $P_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n+1}$

Isomorfismo: $T(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$

2. $\mathcal{M}_{m \times n} \cong \mathbb{R}^{mn}$

$$T\left(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\right) = (a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn})$$

3. A composta de isomorfismos é um isomorfismo, logo $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \cong P_{mn-1}(\mathbb{R})$

4. Seja $X = \{1, \dots, n\}$ então $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}^m) \cong \mathcal{M}_{m\times n}$

$$T : \mathcal{F}(X, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{M}_{m\times n}$$

$$T(f) = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ f(1) & f(2) & \cdots & f(n) \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

<u>OBS</u>: $f(1) \in \mathbb{R}^m \Rightarrow f(1) = (f_{11}, f_{21}, \dots, f_{m1})$

$f(2) \in \mathbb{R}^m \Rightarrow f(2) = (f_{12}, f_{22}, f_{32}, \dots, f_{m2})$

$\vdots$

$$T(f) = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{m1} & \cdots & f_{mn} \end{pmatrix}$$

<u>Pergunta</u>: Como saber se uma transformação linear $T : V \longrightarrow W$ é sobrejetora/injetora/bijetora?

- Por definição:
  - T é sobrejetora se $\mathrm{Im}(T) = W$
  - T é injetora se $T(v_1) = T(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$
  - T é bijetora se é injetora e sobrejetora

Note que:

Se existir $v \in V$, $v \neq \vec{0}_V$ tal que $T(v) = \vec{0}_W$

$\Rightarrow$ T NÃO é injetora pois já sabemos que

$T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$

Isso sugere considerar o seguinte conjunto:

Def: Seja $T: V \to W$ uma transformação linear.
O <u>núcleo de T</u> é o conjunto

$$N(T) = \{v \in V \mid T(v) = \underbrace{0}_{\text{vetor } \vec{0} \text{ do espaço } W}\} \subseteq V$$

Prop: Uma transformação linear $T: V \to W$
é injetora se e somente se $N(T) = \{\underbrace{0}_{\vec{0}_V}\}$

Dem: ($\Rightarrow$) Suponha que T é injetora.

Seja $v \in N(T) \Rightarrow T(v) = \underbrace{0}_{\vec{0}_W} = T(\underbrace{0}_{\vec{0}_V})$. Logo $v = \underbrace{0}_{\vec{0}_V}$

$\Rightarrow N(T) = \{\underbrace{0}_{\vec{0}_V}\}$

($\Leftarrow$) Suponha que $N(T) = \{0\}$. Sejam $v_1, v_2 \in V$ tais que $T(v_1) = T(v_2)$

$$\Rightarrow \underbrace{0}_{\vec{0}_W} = T(v_1) - T(v_2) \underbrace{=}_{T \text{ é linear}} T(v_1 - v_2) \overset{\text{Def. de } N(T)}{\Rightarrow} v_1 - v_2 \in N(T) \overset{N(T)=\{0\}}{\Rightarrow} v_1 - v_2 = \overset{\vec{0}_V}{0}$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2$$

Logo, $T(v_1) = T(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$. Ou seja, T é injetora ■

<u>Exemplos</u>

1. Sejam $V = P_2(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$

Seja $W = \mathbb{R}^2$ e seja $T : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$T(p(x)) = (p(1), p(-1))$$

onde $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in P_2(\mathbb{R})$.

Ou seja, $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1 + a_2,\ a_0 - a_1 + a_2)$

Vamos mostrar que T é linear:

a) $T\big((a_0 + a_1x + a_2x^2) + (b_0 + b_1x + b_2x^2)\big) = T\big((a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2\big)$

$= \big((a_0+b_0) + (a_1+b_1) + (a_2+b_2),\ (a_0+b_0) - (a_1+b_1) + (a_2+b_2)\big) =$

$= \big((a_0+a_1+a_2) + (b_0+b_1+b_2),\ (a_0-a_1+a_2) + (b_0-b_1+b_2)\big) =$

$= (a_0+a_1+a_2,\ a_0-a_1+a_2) + (b_0+b_1+b_2,\ b_0-b_1+b_2)$

$= T(a_0+a_1x+a_2x^2) + T(b_0+b_1x+b_2x^2)$ ✓

b) $T\big(\lambda(a_0+a_1x+a_2x^2)\big) = T(\lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2) =$

$= (\lambda a_0 + \lambda a_1 + \lambda a_2,\ \lambda a_0 - \lambda a_1 + \lambda a_2) =$

$= \big(\lambda(a_0+a_1+a_2),\ \lambda(a_0-a_1+a_2)\big) = \lambda(a_0+a_1+a_2,\ a_0-a_1+a_2)$

$= \lambda T(a_0+a_1x+a_2x^2)$ ✓

- T é sobrejetora: Dado $(r,s) \in \mathbb{R}^2$, seja

$p(x) = \frac{r}{2} + \frac{(r-s)}{2}x + \frac{s}{2}x^2 \Rightarrow T(p(x)) = (r,s)$

- T Não é injetora: Vamos calcular o núcleo de T:

$$N(T) = \{p(x) \in P_2(\mathbb{R}) \mid T(p(x)) = 0\} =$$

$$= \{p(x) \in P_2(\mathbb{R}) \mid (p(1), p(-1)) = (0,0)\}$$

$$= \left\{p(x) \in P_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{cases} p(1) = 0 \\ p(-1) = 0 \end{cases} \right\}$$

Ou seja, $N(T)$ é formado pelos polinômios de grau ≤ 2 tais que $x=1$ e $x=-1$ são raízes do polinômio. Em particular, $T(x^2-1) = (0,0)$. Ou seja, o polinômio $p(x) = x^2-1 \in N(T) \Rightarrow N(T) \neq \{0\}$.

Em termos de a_0, a_1, a_2:

$$N(T) = \left\{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \;\middle|\; \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \right\}$$

- Vamos usar o isomorfismo $P_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^3$
$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) \mapsto (a_0, a_1, a_2)$
para interpretar geometricamente $N(T)$.

Considere: $r = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases} \right\}$

r é uma reta dada pela interseção dos planos

$$\pi_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$$

$$\pi_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+z=0\}$$

A reta r passa pela origem e tem como um vetor diretor o vetor $\vec{u} = (-1, 0, 1)$

Em analogia, podemos pensar em $N(T) \subset P_2(\mathbb{R})$ como uma reta dada pela interseção de dois planos:

$$\pi_1 = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0 + a_1 + a_2 = 0\}$$
$$= \{p(x) \in P_2(\mathbb{R}) \mid p(1) = 0\}$$

$$\pi_2 = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0 - a_1 + a_2 = 0\}$$
$$= \{p(x) \in P_2(\mathbb{R}) \mid p(-1) = 0\}$$

- A reta $r = N(T) \subset P_2(\mathbb{R})$ passa pela origem (o polinômio $0 + 0x + 0x^2$) e tem como vetor diretor o polinômio $-1 + 0x + x^2 = x^2 - 1$
  $(a_0 = -1,\ a_1 = 0,\ a_2 = 1)$

- Note que isso é uma coisa que vcs já sabem! Se $p(x)$ é um polinômio de grau ≤ 2 tal que $p(1) = 0$ e $p(-1) = 0$, então podemos fatorar $p(x)$. Obtemos assim que

$$p(x) = \lambda(x-1)(x+1) = \lambda(x^2 - 1)$$

Ou seja,

$$N(T) = \{\lambda(x^2 - 1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \quad ///$$

Exemplo 2:

Sejam • $V = C^1([a,b],\mathbb{R}) = \{F : [a,b] \to \mathbb{R} \mid F' : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ existe e é contínua}\}$

• $W = C([a,b],\mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ é contínua}\}$

• $T = D : C^1([a,b],\mathbb{R}) \longrightarrow C([a,b],\mathbb{R})$

$$D(F) = F'$$

• D é linear (Mostre Isso!)

• D é sobrejetora: Sabemos que toda função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável.
Pelo teorema fundamental do cálculo temos que:

Dado $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, se $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

$\Rightarrow D(F) = f \Rightarrow$ D é sobrejetora

• D <u>NÃO</u> é injetora

$$\begin{aligned} N(D) &= \{F \in C^1([a,b],\mathbb{R}) \mid D(F) = 0\} \\ &= \{F \in C^1([a,b],\mathbb{R}) \mid F'(x) = 0 \ \forall x \in [a,b]\} \\ &= \{\text{Funções constantes de } [a,b] \text{ em } \mathbb{R}\} \\ &\cong \mathbb{R} \end{aligned}$$

<u>OBS</u>: O Fato que $N(D) \cong \mathbb{R}$ explica o pq de termos que considerar a constante de integração quando definimos a integral.

- D <u>NÃO</u> admite uma inversa pois não é injetora
- A ambiguidade na hora de tentar definir uma inversa vem do fato que

$N(D) \cong \mathbb{R}$: se $D(F) = D(G) \Rightarrow$

$\Rightarrow D(F) - D(G) = 0 \Rightarrow D(F-G) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow F-G \in N(D) \Rightarrow F-G$ é uma função constante

Logo, a primitiva de uma função $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ só está definida a menos de uma constante $c \in \mathbb{R}$.