- Seja $T: V \to V$ aplicação linear
- T transforma um vetor de V em outro vetor de V.
- Queremos "Entender" como os vetores estão sendo transformados. Ou seja, entender a função T.

<u>Ideia</u>: Suponha que $S \subset V$ é um subespaço de V tal que $v \in S \Rightarrow T(v) \in S$ (T transforma vetores de S em vetores de S).

Entender $T|_S$ (a restrição de T à S)

$$T|_S : S \longrightarrow S$$

é mais simples do que entender $T: V \to V$ pois $\dim S < \dim V$ (assumindo $S \neq V$).

<u>Exemplo</u>: $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$T(x,y,z) = \left(-y, \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3}y - \tfrac{2}{3}z, -\tfrac{4}{3}x + \tfrac{2}{3}y - \tfrac{1}{3}z\right)$$

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$, $S = [(1,0,-1),(0,1,-1)] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$

Note que $T(1,0,-1) = (0,1,-1) \in S$

$T(0,1,-1) = (-1,0,1) = -(1,0,-1) \in S$

Logo $S \subset \mathbb{R}^3$ é subespaço invariante

Além disso,

$T(1,1,1) = (-1,-1,-1) \Rightarrow [(1,1,1)]$ tbm é invariante

Temos que

$$\mathbb{R}^3 = S \oplus [(1,1,1)]$$

(S é um plano e $\vec{n} = (1,1,1)$ é seu vetor normal)

Considere a base $\mathcal{F} = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ de $\mathbb{R}^3$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{f_1} = (1,0,-1)\\ \vec{f_2} = (0,1,-1)\end{array}\right\} \text{Base de } S$$

$$\vec{f_3} = (1,1,1)$$

Representa $T|_S$: Rotação por $\frac{\pi}{2}$ no sentido horário

$$\Rightarrow \quad [T]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

Representa $T|_{[(1,1,1)]}$: Reflexão na origem

- Os espaços S e $[(1,1,1)]$ acima são exemplos de subespaços invariantes:

<u>Def</u>: Seja $T: V \to V$ linear. Um subespaço $S \subset V$ é <u>invariante</u> <u>por</u> <u>T</u> se

$$T(S) \subset S$$

Ou seja $\quad v \in S \Rightarrow T(v) \in S$

<u>Exemplos</u>: $S = \{0\}$, $\quad S = V$, $\quad S = N(T)$, $\quad S = \operatorname{Im}(T)$

Vamos ver que $N(T)$ e $Im(T)$ são invariantes:

- Suponha que $v \in N(T) \Rightarrow T(v) = 0 \in N(T)$
- Suponha que $v \in Im(T) \Rightarrow T(v) \in Im(T)$ por definição de $Im(T)$.

⊙ Os subespaços invariantes mais simples (não triviais) são os subespaços de dimensão 1

<u>Def</u>: Um vetor $\vec{v} \neq 0$, $\vec{v} \in V$ é um <u>autovetor</u> de $T: V \longrightarrow V$ se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$$

- Nesse caso, dizemos que λ é <u>autovalor</u> de T.

<u>Exemplo</u>: Se $0 \neq \vec{v} \in N(T)$ então $\vec{v}$ é um autovalor com autovalor $\lambda = 0$ $(T(\vec{v}) = 0 \cdot \vec{v})$

<u>Def</u>: Uma transformação linear é <u>diagonalizável</u> se existir uma base $B = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ de V tal que $\vec{v}_i$ é autovetor de T $\forall i = 1, \dots, n$

<u>OBS</u>: Suponha que $B \doteq (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ seja base de autovetores e $T(\vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i$. Então

$$[T]_{BB} = [T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \text{Matriz} \\ \text{Diagonal} \end{pmatrix}$$

OBS: Nem toda transformação Linear é diagonalizável.

Exemplo: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T = R_\theta$ (Rotação por θ)

T não é diagonalizável pois não admite nenhum subespaço 1-dimensional invariante.

Pergunta: 1 Quando que T é diagonalizável?

2 Como encontrar uma base de Autovetores?

Passo 1: Determinar os autovalores de T:

Prop: Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Então λ é autovalor de $T \iff N(T - \lambda I_V) \neq \{0\}$

Dem: λ é autovalor de $T \iff \exists \vec{v} \neq 0$ tal que $T(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \iff \exists \vec{v} \neq 0$ t.q. $(T - \lambda I)(\vec{v}) = \lambda \vec{v} - \lambda \vec{v} = \vec{0}$

$\iff \exists \vec{v} \neq \vec{0}$ tal que $\vec{v} \in N(T - \lambda I) \iff N(T - \lambda I) \neq \{0\}$ ∎

OBS: Da aula passada, lembre que se $F: V \to V$ é linear então

$$\boxed{N(F) \neq \{0\} \iff \operatorname{Det}(F) = 0}$$

<u>Ideia</u>: Podemos usar a equação

$$\mathrm{Det}(T - tI) = 0 \quad (\text{com incógnita } t)$$

Para determinar os autovalores de T

<u>Def</u>: • $P_T(t) = \mathrm{Det}(T - tI)$ é o <u>polinômio característico</u> de T.

<u>Prop</u>: $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de $T \Leftrightarrow P_T(\lambda) = 0$

(ou seja: $\{\text{Raízes de } P_T(t)\} = \{\text{autovalores de } T\}$)

<u>Exemplo</u>: $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (-y+3z, 4x+5y-3z, 2x-y+z)$

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad [T - tI]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -t & -1 & 3 \\ 4 & 5-t & -3 \\ 2 & -1 & 1-t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P_T(t) &= -t(5-t)(1-t) + 6 - 12 - 6(5-t) + 4(1-t) + 3t \\ &= (t^2 - 5t)(1-t) - 6 - 30 + 6t + 4 - 4t + 3t \\ &= -(t^3 - 6t^2 + 32) \end{aligned}$$

Note que $P_T(-2) = 0$. Logo podemos fatorar

$$P_T(t) = -(t+2)(at^2 + bt + c) = -(at^3 + (2a+b)t^2 + (2b+c)t + 2c)$$

$\Rightarrow a = 1,\ c = 16,\ b = -8 \Rightarrow P_T(t) = -(t+2)(t^2 - 8t + 16) = -(t+2)(t-4)^2$

Autovalores de T: $\boxed{\lambda=-2, \quad \lambda=4}$

__Passo 2__: Uma vez que sabemos os autovalores de T, podemos estudar os subespaços formados pelos autovetores correspondentes.

__Def__: Seja $T: V \to V$. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ um autovalor de T. O __autoespaço__ do autovalor λ é

$$\boxed{S_\lambda = \{\vec{v} \in V \mid T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}\}}$$

__OBS__: λ é autovalor $\iff S_\lambda \neq \{0\}$

__Exemplo__:

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\quad T(x,y,z) = (-y+3z, 4x+5y-3z, 2x-y+z)$

Autovalores: $\lambda=-2$, $\lambda=4$

$$S_{-2} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x,y,z) = -2(x,y,z)\}$$

$$(x,y,z) \in S_{-2} \iff \begin{cases} -y+3z = -2x \\ 4x+5y-3z = -2y \\ 2x-y+z = -2z \end{cases} \iff \begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ 4x+7y-3z=0 \\ 2x-y+3z=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 7 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to \frac{1}{9}L_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Sistema:} \quad \begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x = -z \\ y = z \\ z \text{ arbitrário} \end{array}$$

$$\boxed{S_{-2} = [(1,-1,-1)]}$$

$$S_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x,y,z) = 4(x,y,z)\}$$

$$(x,y,z) \in S_4 \iff \begin{cases} -y + 3z = 4x \\ 4x + 5y - 3z = 4y \\ 2x - y + z = 4z \end{cases} \iff \begin{cases} -4x - y + 3z = 0 \\ 4x + y - 3z = 0 \\ 2x - y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to \frac{1}{3}L_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Sistema} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y - 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 3z \\ z \text{ arbitrário} \end{array}$$

$$\boxed{S_4 = [(0,3,1)]}$$

Autovetores (L.I.) de T: $\vec{v}_1 = (1,-1,1)$, $\vec{v}_2 = (0,3,1)$

<u>OBS</u>: Nesse caso NÃO obtemos base de autovetores de T.

Teorema: Seja $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ os autovalores de $T: V \to V$ ($\lambda_i \neq \lambda_j \ \forall i \neq j$). Seja S_{λ_i} os autoespaços correspondentes.

Então T é diagonalizável $\iff \dim S_{\lambda_1} + \dots + \dim S_{\lambda_k} = \dim V$

Dem:

($\Rightarrow$) Supoha T diagonalizável. Seja $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ base de V formada por autovetores de T.

Reordenando se necessário, podemos assumir:

$$\underbrace{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{d_1}}_{\text{Base de } S_{\lambda_1}}, \underbrace{v_{d_1+1}, \dots, \vec{v}_{d_1+d_2}}_{\text{Base de } S_{\lambda_2}}, \dots\dots, \underbrace{\vec{v}_{d_{k-1}+1}, \dots, \vec{v}_n}_{\text{Base de } S_{\lambda_k}}$$

$\Rightarrow \dim V = \dim S_{\lambda_1} + \dots + \dim S_{\lambda_k}$

($\Leftarrow$) Note que se $\lambda \neq \mu$ então $S_\lambda \cap S_\mu = \{\vec{0}\}$.

De fato,

Se $\vec{v} \in S_\lambda \cap S_\mu \Rightarrow T(\vec{v}) = \lambda \vec{v} = \mu \vec{v}$

$\Rightarrow (\lambda - \mu)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$ pois $\lambda - \mu \neq 0$

Logo $\dim(S_{\lambda_1} + \dots + S_{\lambda_k}) = \dim S_{\lambda_1} + \dots + \dim S_{\lambda_k}$

Se $\dim V = \dim S_{\lambda_1} + \dots + \dim S_{\lambda_k} \Rightarrow V = S_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus S_{\lambda_k}$

e V é diagonalizável (Junte as bases de S_{λ_i}) ∎

<u>Exemplo</u> $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (y+2z, -x-2y-2z, x+y+z)$

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad [T-tI]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -t & 1 & 2 \\ -1 & -2-t & -2 \\ 1 & 1 & 1-t \end{pmatrix}$$

$$P_T(t) = -(t^3+t^2-t-1) = -(t+1)(t^2-1) = -(t+1)^2(t-1)$$

Autovalores $\lambda = 1$, $\lambda = -1$

$$S_{-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x,y,z) = -(x,y,z)\}$$

$$(x,y,z) \in S_{-1} \iff \begin{cases} y+2z = -x \\ -x-2y-2z = -y \\ x+y+z = -z \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+2z = 0 \\ -x-y-2z = 0 \\ x+y+2z = 0 \end{cases}$$

$\iff x+y+2z = 0 \iff x = -y-2z$, y, z arbitrários

$S_{-1} = [(-1,1,0), (-2,0,1)]$ $\qquad$ $\dim S_{-1} = 2$

- $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x,y,z) = (x,y,z)\}$

$$(x,y,z) \in S_1 \iff \begin{cases} y+2z = x \\ -x-2y-2z = y \\ x+y+z = z \end{cases} \iff \begin{cases} -x+y+2z = 0 \\ -x-3y-2z = 0 \\ x+y = 0 \end{cases}$$

$(3) \Rightarrow x = -y$

$(1) \Rightarrow 2y+2z = 0 \Rightarrow z = -y$ $\qquad \Rightarrow \begin{array}{l} x = -y \\ z = -y \\ y \text{ arbitrário} \end{array} \Rightarrow S_1 = [(-1,1,-1)]$

$(2) \Rightarrow 0 = 0$ o.k.

$\dim S_1 = 1$

Note que $\dim S_{-1} + \dim S_1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ T é diagonalizável

$\mathcal{B} = \big((-1,1,0), (-2,0,1), (-1,1,-1) \big)$ é base de autovetores

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$