Lembre que:

TRASFORMAÇÃO LINEAR $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$	Matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$
$\vec{y} = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ $W = \{ \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \mid T(\vec{x}) = \vec{y} \}$	$(*)\ \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = y_m \end{cases}$ $W = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \dots, x_n \text{ satisfazem } * \}$
$W \neq \phi \iff \vec{y} \in \operatorname{Im} T$	$W \neq \phi \iff *$ é possível
Se $\vec{w}_0 \in W \Rightarrow W = \vec{w}_0 + N(T)$	Se $(p_1, \dots, p_n)$ é solução de $(*)$ então $W = \{ (p_1, \dots, p_n) + (z_1, \dots, z_n) \mid z_1, \dots, z_n \text{ satisfazem } (**) \}$ $(**)\ \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$
• Seja $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k)$ base de $\operatorname{Im}(T)$ • $\mathcal{F} = (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k, \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_{m-k})$ base de $\mathbb{R}^m$ • $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$, $T(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$ • $\mathcal{E} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-k})$ base de $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow [T]_{\mathcal{F}\mathcal{E}} = \left(\begin{array}{cccc\|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & & & \\ 0 & \cdots & & 1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & \cdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & * & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\0\\0\\0\end{array}}\right\} k \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\end{array}}\right\} m-k \end{array}$ $\underbrace{\qquad\qquad}_{k}\ \underbrace{\qquad\qquad}_{n-k}$	Matriz do sistema na forma escalonada reduzida $\left(\begin{array}{c\|c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & * \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ $\underbrace{\qquad\qquad}_{k}\ \underbrace{\qquad\qquad}_{n-k}$

✱ Vamos mostrar que esse bloco tem que ser todo nulo:

Se $T(\vec{e}_1) = a_1\vec{w}_1 + \cdots + a_k\vec{w}_k + b_1\vec{f}_1 + \cdots + b_{m-k}\vec{f}_{m-k}$

$\Rightarrow T(\vec{e}_1 - a_1\vec{v}_1 - \cdots - a_k\vec{w}_k) = b_1\vec{f}_1 + \cdots + b_{m-k}\vec{f}_{m-k}$

$\Rightarrow b_1\vec{f}_1 + \cdots + b_{m-k}\vec{f}_{m-k} \in Im(T)$

ABSURDO, pois $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_{m-k}$ foi obtido completando uma base de $Im(T)$.

✱ Corresponde às incognitas livres na solução do sistem

linhas L.I $= k =$ # colunas L.I.

$= \dim Im(T) = n - \dim N(T)$

Ou seja

$\dim N(T) = n -$ # linhas L.I. $= n-k$

Se ⊛ é possível então:

- Determinado $\Leftrightarrow$ $n-k=0$
- Indeterminado $\Leftrightarrow$ $n > k$

Aula de Hoje: O caso $n=m$: **Determinante**

- Dado $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ linear,

Lembre que

- T é injetor $\Leftrightarrow$ T é sobrejetor $\Leftrightarrow$ T é bijetor

$\Leftrightarrow$ colunas de $[T]$ são L.I. $\Leftrightarrow$ Linhas de T são L.I.

- Dado o sistema

$$⊛ \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = y_n \end{cases}$$

⊛ e possível determinado $\Leftrightarrow$ as linhas de

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

são L.I.

É ISSO QUE O DETERMINANTE VAI MEDIR.

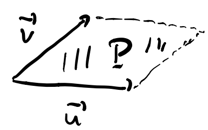
Ideia Geométrica

O Determinante é um "volume orientado"

Exemplo:

Sejam $\vec{u} = (a,b)$, $\vec{v} = (c,d) \in \mathbb{R}^2$

Seja P o paralelograma gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$



$$\Rightarrow \text{Área}(P) = |ad - bc| = \left| \operatorname{Det} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right|$$

OBS: Lembre de GA:

pense em $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como vetores no plano xy em $\mathbb{R}^3$,

ou seja, $\vec{u} = (a,b,0)$, $\vec{v} = (c,d,0)$

$$\Rightarrow \text{Área}(P) = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$$

Lembre que

$\vec{u} \wedge \vec{v}$ é

- Bilinear: $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \wedge \vec{v} = \vec{u}_1 \wedge \vec{v} + \vec{u}_2 \wedge \vec{v}$
  $\vec{u} \wedge (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{u} \wedge \vec{v}_1 + \vec{u} \wedge \vec{v}_2$
  $(\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \wedge (\lambda \vec{v})$

- Alternado: $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$

Exemplo: Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$

P (Paralelepipido gerado por $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$)

$$\operatorname{Vol}(P) = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = |\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w} \rangle| = \left| \operatorname{Det} \begin{pmatrix} - & \vec{u} & - \\ - & \vec{v} & - \\ - & \vec{w} & - \end{pmatrix} \right|$$

Lembre que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ é:

- Tri-linear

$$[u_1+u_2, v, w] = [u_1, v, w] + [u_2, v, w]$$
$$[u, v_1+v_2, w] = [u, v_1, w] + [u, v_2, w]$$
$$[u, v, w_1+w_2] = [u, v, w_1] + [u, v, w_2]$$
$$[\lambda u, v, w] = [u, \lambda v, w] = [u, v, \lambda w] = \lambda [u, v, w]$$

- Alternado:

$$[u, v, w] = -[v, u, w]$$
$$[u, v, w] = -[u, w, v]$$
$$[u, v, w] = -[w, v, u]$$

(<u>OBS</u>: $[v, w, u] = -[v, u, w] = [u, v, w]$

$[w, u, v] = -[u, w, v] = [u, w, v]$)

<u>Ideia</u>: Definir o determinante através das propriedades que deve satisfazer:

<u>Def</u>: Uma função $F: \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{k\text{-vezes}} \longrightarrow \mathbb{R}$

é <u>multi-linear</u> se é linear em cada variável:

- $F(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i + \vec{w}_i, \ldots, \vec{v}_k) = F(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_k) + F(\vec{v}_1, \ldots, \vec{w}_i, \ldots, \vec{v}_k)$
- $F(\vec{v}_1, \ldots, \lambda \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_k) = \lambda F(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_k)$

- F é <u>alternada</u> se

$$F(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_k) = -F(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_k)$$

Trocar a ordem de 2 vetores muda o sinal

OBS: Se $\vec{v}_i = \vec{v}_j = \vec{w}$, então

$$F(\vec{v}_1, \ldots, \vec{w}, \ldots, \vec{w}, \ldots, \vec{v}_k) = 0$$

Pois $F(\vec{v}_1, \ldots, \vec{w}, \ldots, \vec{w}, \ldots, \vec{v}_k) = - F(\vec{v}_1, \ldots, \vec{w}, \ldots, \vec{w}, \ldots, \vec{v}_k)$

Troca a ordem de $\vec{v}_i = w$ com $\vec{v}_j = \vec{w}$.

Prop: Suponha que $F: \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{k\text{-vezes}} \longrightarrow \mathbb{R}$ é multi-linear e alternada. Sejam $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vetores L.D. Então $F(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k) = 0$

Dem: Sem perda de generalidade, podemos assumir que

$$\vec{v}_k = a_1 \vec{v}_1 + \cdots + a_{k-1} \vec{v}_{k-1}$$

$$\Rightarrow F(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k) = F(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{k-1}, a_1 \vec{v}_1 + \cdots + a_{k-1} \vec{v}_{k-1}) =$$

$$= F(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{k-1}, a_1 \vec{v}_1) + F(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{k-1}, a_2 \vec{v}_2) + \cdots + F(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{k-1}, a_{k-1} \vec{v}_{k-1})$$

$$= a_1 \overbrace{F(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{k-1}, \vec{v}_1)}^{0} + a_2 \overbrace{F(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{k-1}, \vec{v}_2)}^{0} + \cdots + a_{k-1} \overbrace{F(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{k-1}, \vec{v}_{k-1})}^{0}$$

$$= 0 \qquad \blacksquare$$

Teorema: Existe uma única função multilinear aldernada $D: \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{n\text{-vezes}} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$D(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) = 1$$

onde $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$

<u>OBS</u>: Irei demonstrar somente quando $n=2$ ou 3

<u>Dem</u>: <u>$n=2$</u>

Seja $\vec{u}=(a,b)=a\vec{e}_1+b\vec{e}_2$, $\vec{v}=(c,d)=c\vec{e}_1+d\vec{e}_2$

$$\Rightarrow D(\vec{u},\vec{v}) = D(a\vec{e}_1+b\vec{e}_2, c\vec{e}_1+d\vec{e}_2) = D(a\vec{e}_1, c\vec{e}_1+d\vec{e}_2)+D(b\vec{e}_2, c\vec{e}_1+d\vec{e}_2)$$

$$= a\left(D(\vec{e}_1, c\vec{e}_1)+D(\vec{e}_1, d\vec{e}_2)\right)+b\left(D(\vec{e}_2, c\vec{e}_1)+D(\vec{e}_2, d\vec{e}_2)\right)$$

$$= a\left(c\,\cancel{D(\vec{e}_1,\vec{e}_1)}+d\,D(\vec{e}_1,\vec{e}_2)\right)+b\left(c\,D(\vec{e}_2,\vec{e}_1)+d\,\cancel{D(\vec{e}_2,\vec{e}_2)}\right)$$

$$= ad\,D(\vec{e}_1,\vec{e}_2) - bc\,D(\vec{e}_1,\vec{e}_2) = ad-bc$$

Troca ordem de $\vec{e}_1, \vec{e}_2$

<u>OBS</u>: Note que $D(\vec{u},\vec{v}) = \operatorname{Det}\begin{pmatrix} - \vec{u} - \\ - \vec{v} - \end{pmatrix} = \operatorname{Det}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$

<u>$n=3$</u>: $\vec{u}=(a_{11}, a_{12}, a_{13}) = a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + a_{13}\vec{e}_3$

$\vec{v}=(a_{21}, a_{22}, a_{23}) = a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{23}\vec{e}_3$

$w=(a_{31}, a_{32}, a_{33}) = a_{31}\vec{e}_1 + a_{32}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3$

$$D(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = D(a_{11}\vec{e}_1+a_{12}\vec{e}_2+a_{13}\vec{e}_3, a_{21}\vec{e}_1+a_{22}\vec{e}_2+a_{23}\vec{e}_3, a_{31}\vec{e}_1+a_{32}\vec{e}_2+a_{33}\vec{e}_3) =$$

$$= a_{11}\,D(\vec{e}_1, a_{21}\vec{e}_1+a_{22}\vec{e}_2+a_{23}\vec{e}_3, a_{31}\vec{e}_1+a_{32}\vec{e}_2+a_{33}\vec{e}_3)$$

$$+ a_{12}\,D(e_2, a_{21}\vec{e}_1+a_{22}\vec{e}_2+a_{23}\vec{e}_3, a_{31}\vec{e}_1+a_{32}\vec{e}_2+a_{33}\vec{e}_3)$$

$$+ a_{13}\,D(e_3, a_{21}\vec{e}_1+a_{22}\vec{e}_2+a_{23}\vec{e}_3, a_{31}\vec{e}_1+a_{32}\vec{e}_2+a_{33}\vec{e}_3)$$

$$= a_{11} D(\vec{e}_1, a_{22}\vec{e}_2 + a_{23}\vec{e}_3, a_{32}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3)$$
$$+ a_{12} D(\vec{e}_2, a_{21}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_3, a_{31}\vec{e}_1 + a_{33}\vec{e}_3)$$
$$+ a_{13} D(\vec{e}_3, a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2, a_{31}\vec{e}_1 + a_{32}\vec{e}_2)$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) D(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) +$$
$$+ a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) D(\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3)$$
$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) D(\vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

///

<u>OBS</u>: $D(u,v,w) = \text{Det}\begin{pmatrix} - u - \\ - v - \\ - w - \end{pmatrix} = \text{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

<u>Def</u>: $\text{Det} : \mathcal{M}_{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\text{Det}\begin{pmatrix} - \vec{u}_1 - \\ - \vec{u}_2 - \\ \vdots \\ - \vec{u}_n - \end{pmatrix} = D(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$$

Ou seja, o determinante é a única função $\text{Det} : \mathcal{M}_{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

- Multilinear alternada nas linhas da Matriz
- $\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = 1$

<u>OBS</u>: É POSSÍVEL ESCREVER UMA FÓRMULA INDUTIVA P/ O CÁLCULO de DET(A):

$$\text{Det}(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{1i} \text{Det}(A_{1i})$$

onde $A_{1i} \in \mathcal{M}_{(n-1)\times(n-1)}$ é a matriz obtida da A retirando a linha 1 e coluna i

OBS: Geometricamente, $|\mathrm{Det}(A)|$ é o volume do paralelepípido n-dimensional gerado pelas linhas de A. Isso pode ser tomado como definição do volume n-dimensional.

- **Cálculo de Determinante via Escalonamento:**

Ideia: Entender como as operações 1, 2, 3 do escalonamento alteram o determinante da matriz:

1 $L_i \leftrightarrow L_j$

$$A \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} A'$$

$$\det(A') = -\det(A)$$

2 $L_i \longrightarrow \mu \cdot L_i \qquad \mu \neq 0$

$$A \xrightarrow{L_i \to \mu \cdot L_i} A'$$

$$\det(A') = \mu \det(A)$$

3 $L_i \longrightarrow L_i + \lambda L_j$

$$A \xrightarrow{L_i \to L_i + \lambda L_j} A'$$

$$\det(A) = \det(A')$$

$$\overbrace{D(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i + \lambda \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_n)}^{\mathrm{Det}(A')} =$$

$$= \underbrace{D(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_n)}_{\mathrm{Det}(A)} + \lambda D(\vec{v}_1, \dots, \cancel{\vec{v}_j, \dots, \vec{v}_j}, \dots, \vec{v}_n)$$

<u>Exemplo</u>: Calcule o determinante da matriz abaixo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2} L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_5 \to L_5 - L_1]{L_2 \to L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_5 \to L_5 + L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_5 \to L_5 + L_3]{L_4 \to L_4 - L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \to \frac{-1}{3} L_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_5 \to L_5 - 4L_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{10}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_5 \to \frac{3}{10} L_5}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Não alteram Det}]{\text{Passos que}} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$1 = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{3}{10} \; \text{Det} A = \frac{-1}{20} \text{Det} A \Rightarrow \boxed{\text{Det} A = -20}$$

Alguns Comentários:

1. As operações não mudam o fato das linhas da matriz serem L.I. ou L.D.

A única menos óbvia é a operação 3:

se $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_i, \dots, \vec{u}_j, \dots, \vec{u}_n$ são L.I. $\Rightarrow \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_i + \lambda\vec{u}_j, \dots, \vec{u}_j, \dots, \vec{u}_n$ são L.I.

De fato, se

$$x_1\vec{u}_1 + \dots + x_i(\vec{u}_i + \lambda\vec{u}_j) + \dots + x_j\vec{u}_j + \dots + x_n\vec{u}_n = \vec{0}$$

$$\Rightarrow x_1\vec{u}_1 + \dots + x_i\vec{u}_i + \dots + (\lambda x_i + x_j)\vec{u}_j + \dots + x_n\vec{u}_n = \vec{0}$$

$$\Rightarrow x_1 = \dots = x_i = \dots = \lambda x_i + x_j = \dots = x_n = 0$$

mas $\begin{cases} x_i = 0 \\ \lambda x_i + x_j = 0 \end{cases} \Rightarrow x_j = 0$

$$\Rightarrow x_1 = \dots = x_n = 0 \qquad (x_k = 0 \ \forall k) \quad //$$

2. Linhas de A são L.I. $\Longleftrightarrow \det A \neq 0$

(O efeito das operações é mudar o determinante por um múltiplo não nulo)

Consequência:

- $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = y_n \end{cases}$ é possível determinado $\Longleftrightarrow \operatorname{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \neq 0$

- $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é isomorfismo $\iff$ $\mathrm{Det}([T]) \neq 0$

Propriedades Básicas do Determinante (Não serão demonstradas... Procure no livro)

① $\mathrm{Det}(A \cdot B) = \mathrm{Det}(A) \cdot \mathrm{Det}(B)$

② A é invertível $\iff$ $\mathrm{Det}\, A \neq 0$. Nesse caso

$$\mathrm{Det}\, A^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}\, A}$$

③ Se $T: V \longrightarrow V$ é linear, e $E = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ é base de V

$\mathrm{Det}\, [T]_{EE}$ NÃO Depende da base E.

Logo, faz sentido falar de $\mathrm{Det}(T)$ onde $T: V \to V$.

④ T é isomorfismo $\iff$ $\mathrm{Det}(T) \neq 0$