Lembre que:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots a_{1n}x_n = y_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{cases}$$

Sistema com m equações e n incógnitas

Matriz estendida do sistema:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & y_m \end{array}\right)$$

Operações que não mudam as soluções do sistema:

1. $L_i \leftrightarrow L_j$
2. $L_i \longrightarrow \mu \cdot L_i$, $\mu \neq 0$
3. $L_i \longrightarrow L_i + \lambda L_j$

Estratégia: Fazer as operações 1, 2, 3 até deixar a matriz na forma escalonada reduzida

Um matriz A está na forma escalonada reduzida se:

1. A primeira entrada não nula de cada linha é 1 (chamado pivô da linha)
2. As linhas nulas estão no final da matriz
3. O pivô da linha $i+1$ está a direita do pivô da linha i
4. Se uma coluna tem um pivô então todos os outros elementos da coluna são nulos.

Exemplos:

1)
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 3L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \to \frac{-1}{5} L_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -7/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 - 2L_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 11/5 \\ 0 & 1 & 0 & -7/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 + L_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 & -7/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \end{pmatrix}}_{\text{Forma escalonada reduzida}}$$

2)
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to \frac{1}{3} L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 + L_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Forma Escalonada reduzida}}$$

Algorítimo para escalonar (Método da eliminação Gaussiana):

1. Identifique qual linha tem a entrada não nula mais à esquerda

2. Se a linha i é a linha identificada em 1 faça $L_1 \leftrightarrow L_i$

3. Se μ é a primeira entrada não nula da linha 1 (antiga linha i), faça $L_1 \to \frac{1}{\mu} L_1$. Agora a linha 1 tem um pivô.

4. Some multiplos da linha 1 às outras linhas para zerar todas as entradas abaixo do pivô da linha 1

5. Desconsidere a primeira linha da matriz e repita 1 - 4 a partir da linha seguinte. Faça isso até todas as linhas não nulas terem pivôs e as linhas nulas estarem no fim da matriz.

6. De baixo para cima e da direita para a esquerda, faça as entradas acima dos pivôs ficarem nulos. A matriz ficará na forma escalonada reduzida.

Exemplo:

Resolva o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_2 - x_3 + x_6 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 = 2 \\ 3x_3 - x_6 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1 \end{cases}$$

Matriz estendida do sistema / Escalonamento

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to \frac{1}{2}L_2} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_4 \to L_4 - L_2} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \to \frac{1}{3}L_3} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_4 \to L_4 - 2L_3} \left(\begin{array}{cccccc|c} \boxed{1} & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 2/3 & 2 \end{array}\right)$$

pivô $= \square$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 - \frac{1}{2}L_4} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2/3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \to L_2 + L_3} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2/3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 + \frac{1}{2}L_2} \underbrace{\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2/3 & 2 \end{array}\right)}_{\text{Forma escalonada reduzida}}$$

Voltando ao sistema:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_5 = -1/2 \\ x_2 + \frac{2}{3}x_6 = -1 \\ x_3 - \frac{1}{3}x_6 = 0 \\ x_4 + x_5 + \frac{2}{3}x_6 = 2 \end{cases}$$

Solução:

$$x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_5 + 0 \cdot x_6$$
$$x_2 = -1 + 0 \cdot x_5 - \frac{2}{3}x_6$$
$$x_3 = 0 + 0 \cdot x_5 + \frac{1}{3}x_6$$
$$x_4 = 2 - x_5 - \frac{2}{3}x_6$$

x_5, x_6 arbitrários

Chamando $x_5 = \lambda$, $x_6 = \mu$ temos

$$x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda + 0 \cdot \mu$$
$$x_2 = -1 + 0 \cdot \lambda - \frac{2}{3}\mu$$
$$x_3 = 0 + 0 \cdot \lambda + \frac{1}{3}\mu$$
$$x_4 = 2 - 1 \cdot \lambda - \frac{2}{3}\mu$$
$$x_5 = 0 + 1 \cdot \lambda + 0 \cdot \mu$$
$$x_6 = 0 + 0 \cdot \lambda + 1 \cdot \mu$$

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ é solução do sistema $\iff$

$$\boxed{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \left(-\frac{1}{2}, -1, 0, 2, 0, 0\right) + \lambda\left(-\frac{1}{2}, 0, 0, -1, 1, 0\right) + \mu\left(0, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0, 1\right), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

<u>OBS</u>: Interpretação geométrica:

$W \subset \mathbb{R}^6$, o conjunto das soluções do sistema é um plano que passa pelo ponto $(-\frac{1}{2}, -1, 0, 2, 0, 0)$ e tem como vetores diretores $u = (-\frac{1}{2}, 0, 0, -1, 1, 0)$ e $v = (0, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0, 1)$