Aula 15: O método da eliminação Gaussiana
(Resolução de sistemas de equação lineares)

• Seja $T: V \to W$ linear e $w \in W$.

Problema: 1 $w \in \operatorname{Im} T$?

2 Quais são todos os $v \in V$, tais que $T(v) = w$?

Se $E = (e_1, \dots, e_n)$ é base de V e $F = (f_1, \dots, f_m)$ é base de W, podemos re-expressar 1 & 2 em termos de sistemas de equações lineares:

Seja $A = [T]_{FE} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $w = (y_1, \dots, y_m)_F$

e considere o sistema de m equações e n incógnitas

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{cases}$$

Problema: 1 $(*)$ admite alguma solução?

2 Quais são todas as soluções de $(*)$

OBS: Note que $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ satisfazem $(*) \Leftrightarrow v = (x_1, \dots, x_n)_E$ satisfaz $T(v) = w$

Queremos descrever um algorítimo para resolver $(*)$

Temos três operações que podemos fazer no sistema $(*)$ que não altera as suas soluções:

<u>Operação 1</u>: $L_i \leftrightarrow L_j$ (trocar a linha i com a linha j)

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \quad\vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = y_i \\ \quad\vdots \\ a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n = y_j \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{cases} \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} (**)\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \quad\vdots \\ a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n = y_j \\ \quad\vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = y_i \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{cases}$$

$x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ é solução de $(*)$ $\Longleftrightarrow$ é solução de $(**)$

<u>Operação 2</u> $L_i \to \mu L_i$, $\mu \neq 0$ (Multiplicar uma linha por um número real não nulo)

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \quad\vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = y_i \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{cases} \xrightarrow{L_i \to \mu L_i} (**)\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \quad\vdots \\ \mu a_{i1}x_1 + \cdots + \mu a_{in}x_n = \mu y_i \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{cases}$$

$x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ é solução de $(*)$ $\Longleftrightarrow$ é solução de $(**)$

Operação 3 : $L_i \to L_i + \lambda L_j$ (Somar um multiplo de uma linha à outra linha) ③

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = y_i \\ \vdots \\ a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n = y_j \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{cases} \xrightarrow{L_i \to L_i + \lambda L_j} (**) \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \vdots \\ (a_{i1} + \lambda a_{j1})x_1 + \cdots + (a_{in} + \lambda a_{jn})x_n = y_i + \lambda y_j \\ \vdots \\ a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n = y_j \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{cases}$$

$x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ é solução de (*) $\iff$ é solução de (**)

- De fato, se $x_1, \dots, x_n$ é solução de (*) então $x_1, \dots, x_n$ satisfaz todas as equações de (**) exceto, possívelmente, a equação

$$(a_{i1} + \lambda a_{j1})x_1 + \cdots + (a_{in} + \lambda a_{jn})x_n = y_1 + \lambda y_j \qquad (***)$$

Mas $(a_{i1} + \lambda a_{j1})x_1 + \cdots + (a_{in} + \lambda a_{jn})x_n = (a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n) + \lambda(a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n)$

$= y_i + \lambda y_j$

$\Rightarrow x_1, \dots, x_n$ satisfaz (***) $\Rightarrow x_1, \dots, x_n$ satisfaz (**)

- Reciprocamente se $x_1, \dots, x_n$ satisfaz (**) então satisfaz (*) pois (*) é obtido de (**) realizando a operação

$$L_i \longrightarrow L_i + (-\lambda) \cdot L_j$$

//

OBJETIVO: Realizar as operações 1, 2, 3 para deixar o sistema da forma "mais simples possível"

- Mais uma simplificação:

Toda a informação do sistema $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{cases}$

está guardada na <u>matriz estendida do sistema</u>

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{m1} & y_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} & y_m \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & Y \end{array}\right)$$

Vamos fazer as operações 1, 2, 3 diretamente na matriz $\tilde{A}$. O objetivo é deixar A na <u>forma escalonada reduzida</u>

Um matriz A está na <u>forma escalonada reduzida</u> se:

1. A primeira entrada não nula de cada linha é 1 (chamado <u>pivô</u> da linha)
2. As linhas nulas estão no final da matriz
3. O pivô da linha $i+1$ está a direita do pivô da linha i
4. Se uma coluna tem um pivô então todos os outros elementos da coluna são nulos.

Exemplos:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Escalonado Reduzido}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Falha } 1}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Falha } 4}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Falha } 3}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Falha } 2}$$

Exercício p/ Fazer em Aula ou em Casa:

Usando as operações 1, 2, 3 colocar as seguintes matrizes na forma escalonada reduzida

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Próxima Aula: Algorítimo (Eliminação Gaussiana)