Aula 14:

Lembre que:

V esp. vetorial com base $E=(v_1,\dots,v_n)$

W esp. vetorial com base $F=(w_1,\dots,w_m)$

Correspondência Bijetora:

$$\mathrm{Lin}(V,W) \xleftrightarrow{1-1} \mathcal{M}_{m\times n}$$

- Dado $T:V\to W$ $\rightsquigarrow$ $[T]_{FE} = \begin{pmatrix} | & & | & & | \\ T(v_1)_F & \cdots & T(v_j)_F & \cdots & T(v_n)_F \\ | & & | & & | \end{pmatrix}$

- Dado $A\in\mathcal{M}_{m\times n}$ $\rightsquigarrow$ $T_A: V\to W$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix} \qquad T_A(x_1v_1+\dots+x_nv_n) = (a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n)w_1+\dots+(a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n)w_m$$

Em notação matricial: $\boxed{\begin{pmatrix} | \\ T_A(v) \\ | \end{pmatrix}_F = A\cdot\begin{pmatrix} | \\ v \\ | \end{pmatrix}_E}$

- $U \xrightarrow{S} V \xrightarrow{T} W$

Produto de Matrizes

$$\Rightarrow [S\circ T]_{GE} = [S]_{GF}\cdot[T]_{FE}$$

- <u>Matriz de Mudança de Base</u>

Seja $I: V\to V$ a transformação linear Identidade:

$I(v)=v$

Se $E=(e_1,\dots,e_n)$ e $F=(f_1,\dots,f_n)$ são bases de V

$\Rightarrow [I]_{FE}\in\mathcal{M}_{n\times n}$ é chamado <u>Matriz de Mudança de Base de E para F</u>

- O motivo do nome é o seguinte:

Se $v = (x_1, \dots, x_n)_E$ então $[I]_{FE} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ v \\ | \end{pmatrix}_F$

ou seja, se $[I]_{FE} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ então

$$v = \left(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n,\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n,\ \dots,\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n\right)_F$$

Exemplo:

Considere as base de $P_2(\mathbb{R})$ abaixo:

$E = (1, x, x^2)$

$F = (x-1, x^2+x+1, x^2-x)$

Vamos calcular $[I]_{FE}$

- 1 na base F:

$$1 = a(x-1) + b(x^2+x+1) + c(x^2-x) = (b-a) + (a+b-c)x + (b+c)x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b-a = 1 \\ a+b-c = 0 \\ b+c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} (3) \Rightarrow c = -b \\ (2) \Rightarrow a+2b = 0 \Rightarrow a = -2b \\ (1) \Rightarrow 3b = 1 \Rightarrow b = 1/3,\ a = -\frac{2}{3},\ c = -1/3 \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{1 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)_F}$$

- x na base F:

$$x = a(x-1) + b(x^2+x+1) + c(x^2-x) \Rightarrow \begin{cases} b-a = 0 \\ a+b-c = 1 \\ b+c = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} (3) \Rightarrow b = -c \\ (1) \Rightarrow a = b \end{array}\right\} \Rightarrow (2) \Rightarrow 3b = 1 \Rightarrow b = 1/3,\ a = 1/3,\ c = -1/3$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}\right)_F}$$

- x^2 na base F:

$$x^2 = a(x-1) + b(x^2+x+1) + c(x^2-x) \Rightarrow \begin{cases} b - a = 0 \\ a+b-c=0 \\ b+c = 1 \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow a = b$

$(2) \Rightarrow c = 2b$

$(3) \Rightarrow b = 1/3, \; a = 1/3, \; c = 2/3 \;\Rightarrow\; x^2 = (1/3, 1/3, 2/3)_F$

Logo,

$$[T]_{FE} = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Encontre as coordenadas de $p(x) = 1 - x + 3x^2$ na base F

$p(x) = (1, -1, 3)_F$

$$[T]_{FE} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{1 - x + 3x^2 = (0, 1, 2)_F}$$

OBS: Note que $I \circ I = I$. Logo

$$\boxed{[I]_{GE} = [I]_{GF} \cdot [I]_{FE}}$$

Def: Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ é invertível se
$(n=m!!!)$

existir $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que $A \cdot B = I_n$ e $B \cdot A = I_n$

onde $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Prop: Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ é invertível, então a matriz $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que $AB = BA = I_n$ é única

Dem: Suponha que $AC = CA = I_n$

$\Rightarrow AB = AC \Rightarrow BAB = BAC \Rightarrow I_n B = I_n C \Rightarrow B = C$ ■

Notação: Se A é invertível, a matriz A^{-1} é a única matriz tal que $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$. A^{-1} é a matriz inversa de A.

OBS: Vamos aprender a calcular A^{-1} mais para frente

- Sejam V, W espaços vetoriais da mesma dimensão $E = (e_1, \dots, e_n)$ base de V, $F = (f_1, \dots, f_n)$ base de W

- Sejam $I_V : V \to V$, $I_W : W \to W$ as transformações identidade de cada espaço

Note que:

① $[I_V]_{EE} = I_n = [I_W]_{FF}$

② $T : V \to W$ é isomorfismo $\Leftrightarrow$ $[T]_{FE}$ é invertível

Nesse caso, $[T^{-1}]_{EF} = [T]_{FE}^{-1}$

De fato, $T : V \to W$ isomorfismo $\Leftrightarrow \exists\, T^{-1} : W \to V$ tal que

$T \circ T^{-1} = I_W$, $T^{-1} \circ T = I_V \Leftrightarrow [T \circ T^{-1}]_{FF} = I_n = [T^{-1} \circ T]_{EE}$

$\Leftrightarrow [T]_{FE} \cdot [T^{-1}]_{EF} = I_n = [T^{-1}]_{EF} [T]_{FE} \Leftrightarrow [T]_{FE}$ é invertível com inversa

$[T]_{FE}^{-1} = [T^{-1}]_{EF}$

Prop: Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$. Então A é invertível $\iff$ As colunas de A, pensadas como vetores de $\mathbb{R}^n$, são L.I.

Dem: Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Considere $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} | \\ T_A(v) \\ | \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} = A \cdot \begin{pmatrix} | \\ v \\ | \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}$$

Então A é invertível $\iff T_A$ é isomorfismo (bijetor)

Note que as colunas de A são

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ T_A(e_1) & T_A(e_2) & \cdots & T_A(e_n) \\ | & | & & | \end{pmatrix} \quad \text{onde } \mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$$

é a base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Logo T_A é isomorfismo $\iff T_A$ é sobrejetor $\iff$

$Im(T_A) = \mathbb{R}^n \iff \dim [T_A(e_1), \dots, T_A(e_n)] = n \iff T_A(e_1), \dots, T_A(e_n)$ são L.I. $\blacksquare$

• Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e seja $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, $A = [T]_{\mathcal{F}\mathcal{E}}$ onde $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_m)$ são as bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$

Seja $w \in \mathbb{R}^m$.

Pergunta: Como saber se $w \in Im(T)$?

$w \in Im(T) \iff \exists\, v \in \mathbb{R}^n$ t.q. $T(v) = w$

Se $w = (y_1, \ldots, y_m)$ e $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

então $w \in \mathrm{Im}(T) \iff \exists\, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$\iff \exists\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn} = y_m \end{cases}$$

Ou seja, resolver o sistema $(*)$ (sistema de m eq. com n incógnitas) é o mesmo que determinar se $w = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathrm{Im}\, T$ onde $T = T_A$.

Na Próxima aula vamos aprender a resolver $(*)$ por escalonamento.