Aula 12:

Parte 1: Teorema do Núcleo e da Imagem

Seja $T: V \to W$ uma transformação linear on V e W são espaços vetoriais de dimensão finita

- Já vimos que se $V = [v_1, \dots, v_d]$ então $Im(T) = [T(v_1), \dots, T(v_d)]$.

Para quem não lembra, aqui está o argumento:

se $w \in Im(T) \Rightarrow w = T(v)$ para algum $v \in V$.

Como $V = [v_1, \dots, v_d]$ segue que $v = x_1 v_1 + \dots + x_d v_d$

$$\Rightarrow w = T(v) = x_1 T(v_1) + \dots + x_d T(v_d) \in [T(v_1), \dots, T(v_d)] \quad //$$

Prop: Seja $B = (v_1, \dots, v_d)$ uma base de V. Seja $T: V \to W$ linear. Se $N(T) = \{0\} \Rightarrow B' = (T(v_1), \dots, T(v_d))$ é base de $Im(T)$.

Dem: Já sabemos que $Im(T) = [T(v_1), \dots, T(v_d)]$. Logo, só precisamos mostrar que $T(v_1), \dots, T(v_d)$ são L.I.

Suponha que $a_1 T(v_1) + \dots + a_d T(v_d) = 0$. Segue que

$$T(a_1 v_1 + \dots + a_d v_d) = 0 \Rightarrow a_1 v_1 + \dots + a_d v_d \in N(T) = \{0\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 v_1 + \dots + a_d v_d = 0 \underset{v_1, \dots, v_d \text{ L.I.}}{\Rightarrow} a_1 = a_2 = \dots = a_d = 0 \Rightarrow T(v_1), \dots, T(v_d) \text{ L.I.}$$

■

Teorema (Núcleo-Imagem)

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $T: V \to W$ uma aplicação linear. Então

$$\boxed{\dim V = \dim N(T) + \dim \mathrm{Im}(T)}$$

Dem: • Se $N(T) = \{0\}$ isso é consequência da prop. anterior: Se $B = (v_1, \dots, v_d)$ é base de V então $B' = (T(v_1), \dots, T(v_d))$ é base de $\mathrm{Im}(T) \Rightarrow \dim V = d = \dim \mathrm{Im}(T)$

($\dim N(T) = 0$)

• Suponha $N(T) \neq \{0\}$. Seja $F = (f_1, \dots, f_\ell)$ uma base de $N(T)$. Pelo teorema do completamento, existem $g_1, \dots, g_{d-\ell} \in V$ tais que $B = (f_1, \dots, f_\ell, g_1, \dots, g_{d-\ell})$ é base de V.

Vou mostrar que $B' = (T(g_1), \dots, T(g_{d-\ell}))$ é base de $\mathrm{Im}(T)$

(i) $\mathrm{Im}(T) = [T(g_1), \dots, T(g_{d-\ell})]$:

$$\mathrm{Im}(T) = [T(f_1), \dots, T(f_\ell), T(g_1), \dots, T(g_{d-\ell})] = [T(g_1), \dots, T(g_{d-\ell})]$$

Pois $T(f_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, \ell$

(ii) $T(g_1), \dots, T(g_{d-\ell})$ são L.I.:

Note que por construção $V = N(T) \oplus [g_1, \dots, g_{d-\ell}]$ e portanto $v \in N(T) \cap [g_1, \dots, g_{d-\ell}] \iff v = 0$

• Suponha que $a_1 T(g_1) + \dots + a_{d-\ell} T(g_{d-\ell}) = 0 \Rightarrow T(a_1 g_1 + \dots + a_{d-\ell} g_{d-\ell}) = 0$

$\Rightarrow a_1 g_1 + \dots + a_{d-\ell} g_{d-\ell} \in N(T) \cap [g_1, \dots, g_{d-\ell}] \Rightarrow a_1 g_1 + \dots + a_{d-\ell} g_{d-\ell} = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_{d-\ell} = 0$

Logo,

$$\boxed{\dim V = d = \ell + (d-\ell) = \dim N(T) + \dim \mathrm{Im}(T)}$$

■

<u>Corolário</u>: Suponha que $\dim V = \dim W = d$ e seja $T: V \to W$ linear. As seguintes afirmações são equivalentes

1. T é injetora
2. T é sobrejetora
3. T é bijetora (isomorfismo)

<u>Dem</u>: Ser bijetora significa ser injetora e sobrejetora. Logo, basta mostrar que 1 $\Leftrightarrow$ 2

- <u>1 $\Leftrightarrow$ 2</u>:

Teorema Nucleo Imagem

T é injetora $\Leftrightarrow N(T) = \{0\} \Leftrightarrow \dim N(T) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dim V = \dim \mathrm{Im}(T) \Leftrightarrow \dim W = \dim \mathrm{Im}(T) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(T) = W$

$\dim V = \dim W$

$\Leftrightarrow T$ é sobrejetor. ■

<u>Parte 2 da Aula</u>: Matriz de uma transformação linear

- V espaço vetorial de dimensão n
- W espaço vetorial de dimensão m
- $E = (e_1, \dots, e_n)$ base de V
- $F = (f_1, \dots, f_m)$ base de W

Ideia: • Uma transformação linear $T: V \to W$ é totalmente determinada por $T(e_1), \dots, T(e_n)$.

De fato, se sabemos que $T(e_1) = w_1, \dots, T(e_n) = w_n$ então $T(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 T(e_1) + \dots + x_n T(e_n) = x_1 w_1 + \dots + x_n w_n$.

• Podemos expressar cada $w_j = T(e_j)$ em termos da base F de W:

$$w_j = a_{1j} f_1 + a_{2j} f_2 + \dots + a_{mj} f_m = (a_{1j}, \dots, a_{mj})_F$$

Ou seja, os números a_{ij}, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ guardam toda a informação da transformação linear $T: V \to W$.

É natural organizar esta informação em uma matriz.

Def: Seja $T: V \to W$ linear, $\underbrace{E = (e_1, \dots, e_n)}_{\text{base de } V}$, $\underbrace{F = (f_1, \dots, f_m)}_{\text{base de } W}$.

<u>A Matriz de T nas base E e F</u> é

$$[T]_{FE} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times n}$$

onde $T(e_j) = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})_F$

"Ou seja, a j-ésima coluna é composta pelas coordenadas na base F de T do j-ésimo vetor da base E"

$$[T]_{FE} = \begin{pmatrix} | & & | & & | \\ T(e_1)_F & \cdots & T(e_j)_F & \cdots & T(e_n)_F \\ | & & | & & | \end{pmatrix}$$

- Como recuperamos T a partir de $[T]_{FE}$?

→ Para calcular $T(v)$, escrevemos v na base E

$$v = (x_1, \dots, x_n)_E$$

→ Calculamos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

→ $T(v) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)_F$

Esquematicamente,

$$\boxed{[T]_{FE} \cdot \begin{pmatrix} | \\ v \\ | \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} | \\ T(v) \\ | \end{pmatrix}_F}$$

Para ver isso, note que (lá vem conta....)

$$T(x_1e_1+\cdots+x_1e_n) = x_1T(e_1)+\cdots+x_nT(e_n) =$$

$$= x_1(a_{11}f_1+a_{21}f_2+\cdots+a_{m1}f_m) + x_2(a_{12}f_1+a_{22}f_2+a_{32}f_3+\cdots+a_{m2}f_m)+$$

$$\cdots + x_n(a_{1n}f_1+a_{2n}f_2+\cdots+a_{mn}f_m)$$

$$= (a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{m}x_n)f_1+(a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n)f_2+\cdots+(a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n)f_m$$

//

Explicação Conceitual:

① Sejam V, W espaços vetoriais. Seja

$$Lin(V,W) = \{T : V \to W \mid T \text{ é linear}\}$$

Então $Lin(V,W)$ é um espaço vetorial, onde:

- $(T_1+T_2)(v) = T_1(v)+T_2(v)$
- $(\lambda T)(v) = \lambda \cdot T(v)$

② Se $\dim V = n$, $\dim W = m$ então $Lin(V,W) \cong \mathcal{M}_{m\times n}$ (isomorfismo de espaços vetoriais).

③ O isomorfismo vem da escolha de bases $E=(e_1,\ldots,e_n)$ de V e $F=(f_1,\ldots,f_m)$ de W, i.e., dados E e F a transformação

$$\begin{aligned} \varphi : Lin(V,W) &\longrightarrow \mathcal{M}_{m\times n} \\ T &\longmapsto [T]_{FE} \end{aligned}$$

é um isomorfismo linear

④ E, F determinam uma base de $\text{Lin}(V,W)$:

$$G = (T_{11}, \dots, T_{1n}, T_{21}, \dots, T_{2n}, \dots, T_{m1}, \dots, T_{mn})$$

onde $T_{ij} : V \longrightarrow W$, $T_{ij}(e_k) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq j \\ f_i & \text{se } k = j \end{cases}$

Ou seja, $T_{ij}(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_j f_i$

ou em outras palavras

$$[T_{ij}]_{FE} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & 1 & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \text{linha } i \\ \text{coluna } j & \end{array}$$

$\boxed{\text{Exemplos Na Próxima Aula}}$