Aula 10: Bases: Exemplos, Coordenadas, Teorema do Completamento

Lembre que:

- Uma base de um subespaço $S \subset V$ é um conjunto ordenado $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_k)$ tal que

  (i) $v_1, \ldots, v_k$ são L.I.

  (ii) $[v_1, \ldots, v_k] = S$

- $S \subset V$ tem dimensão finita se S admite uma base ou se $S = \{0\}$

- $$\dim S = \begin{cases} \# \text{vetores na base de } S & \text{se } S \text{ admite base} \\ 0 & \text{se } S = \{0\} \\ \infty & \text{se } S \neq \{0\} \text{ e não admite base (finita)} \end{cases}$$

Exemplos:

1. Base Canônica de $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n) \quad \text{onde} \quad e_i = (0, \ldots, 0, \underset{\text{i-ésima posição}}{1}, 0, \ldots, 0)$$

$\dim \mathbb{R}^n = n$

2. Seja $V = P_2(\mathbb{R})$, $S = \{p(x) \in P_2(\mathbb{R}) \mid p(1) = 0\}$

Vamos encontrar uma base de S:

$$S = \{a + bx + cx^2 \mid a + b + c = 0\} = \{a + bx + cx^2 \mid a = -b - c\} =$$

$$= \{-b - c + bx + cx^2 \mid b, c \in \mathbb{R}\} = \{-b(1-x) - c(1-x^2) \mid b, c \in \mathbb{R}\} =$$

$$= [(1-x), (1-x^2)]$$

Vamos ver que $(1-x), (1-x^2)$ são L.I.:

Suponha que $\alpha(1-x) + \beta(1-x^2) = 0 \Rightarrow (\alpha+\beta) - \alpha x - \beta x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha = 0 \\ -\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

<u>Conclusão</u>: • $B = (1-x, 1-x^2)$ é uma base de S

• $\dim S = 2$

3) $V = \mathcal{M}_{3\times 3}$, $S = V$

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\1&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&0&0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix} \right)$$

$\dim \mathcal{M}_{3\times 3} = 9$

<u>OBS</u>: Mais geralmente $B = (E_{11}, \dots, E_{ij}, \dots, E_{nn})$, $\begin{matrix} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n \end{matrix}$

é base de $\mathcal{M}_{n\times n}$ onde

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{pmatrix} \longleftarrow \text{linha } i$$

$$\uparrow$$
$$\text{coluna } j$$

4) $V = \mathcal{M}_{4\times 4}$, $S = \{ A \in \mathcal{M}_{4\times 4} \mid A = A^T \}$

$$A \in S \iff A = \begin{pmatrix} a&b&c&d\\ b&e&f&g\\ c&f&h&i\\ d&g&i&j \end{pmatrix} \qquad a,b,c,d,e,f,g,h,i,j \in \mathbb{R}$$

$$\iff A = a\overset{v_1}{\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}} + b\overset{v_2}{\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}} + c\overset{v_3}{\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}} + d\overset{v_4}{\begin{pmatrix} 0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0 \end{pmatrix}} +$$

$$e\underset{v_5}{\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}} + f\underset{v_6}{\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}} + g\underset{v_7}{\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0 \end{pmatrix}} + h\underset{v_8}{\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}} + i\underset{v_9}{\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0 \end{pmatrix}} + j\underset{v_{10}}{\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix}}$$

$B=(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9,v_{10})$ é base de S

$\dim S = 10$

5 $V=P_3(\mathbb{R})$, $\quad S=\left\{p\in P_3(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{cases} p'(1)=0\\ p(-1)=0\end{cases}\right\}$

$$a+bx+cx^2+dx^3\in S \iff \begin{cases} b+2c+3d=0\\ a-b+c-d=0\end{cases} \iff \begin{matrix} b=-2c-3d\\ a=3c+2d\end{matrix} \quad c,d \text{ arbitrários}$$

$$\iff p(x) = (3c+2d)+(-2c-3d)x+cx^2+dx^3$$

$$= c(3-2x+x^2)+d(2-3x+x^3)\ , \quad c,d\in\mathbb{R}$$

Ou seja, $\quad S=[3-2x+x^2,\ 2-3x+x^3]$

Note que $\quad 3-2x+x^2,\ 2-3x+x^3$ são L.I. (Exercício!!!)

Logo $\quad B=(3-2x+x^2,\ 2-3x+x^3)$ é base de S, $\dim S=2$

- <u>Coordenadas de um vetor numa base</u>

Seja V um espaço vetorial e $B=(v_1,\dots,v_d)$ uma base de V.

<u>Prop</u>: Se $w\in V$, então existem únicos $x_1,\dots,x_d\in\mathbb{R}$ tais que $\quad w=x_1v_1+\dots+x_dv_d$

<u>Dem</u>: Como $V=[v_1,\dots,v_d]$, existem $x_1,\dots,x_d$ como acima.

Suponha agora que $\quad w=x_1v_1+\dots+x_dv_d$, $\ w=y_1v_1+\dots+y_dv_d$

$$\Rightarrow (x_1-y_1)v_1+\dots+(x_d-y_d)v_d=0 \xRightarrow[v_1,\dots,v_d \text{ L.I.}]{} x_1-y_1=0,\dots,x_d-y_d=0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1=y_1\\ x_2=y_2\\ \vdots\\ x_d=y_d\end{matrix} \quad \blacksquare$$

<u>Def:</u> Se $\mathcal{B}=(v_1,\dots,v_d)$ é base de V, e $w=x_1v_1+\dots+x_dv_d$, escrevemos $w=(x_1,\dots,x_d)_{\mathcal{B}}$ e dizemos que $(x_1,\dots,x_d)$ são as coordenadas de w na base $\mathcal{B}$.

<u>Exemplo:</u> $V=P_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}=(1-x^2,\ 1+x-x^2,\ x+x^2)$

Vamos encontrar as coordenadas de $p(x)=x^2$ na base $\mathcal{B}$:

$$x^2=a(1-x^2)+b(1+x-x^2)+c(x+x^2)=(a+b)+(b+c)x+(-a-b+c)x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ -a-b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} a=-b \\ c=-b \\ b-b-b=1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} a=1 \\ b=-1 \\ c=1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2=(1,-1,1)_{\mathcal{B}}}$$

<u>Exemplo:</u> $V=\mathcal{M}_{2\times 2}$, $\mathcal{B}=\Bigg(\underset{E_1}{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}},\underset{E_2}{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}},\underset{E_3}{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}},\underset{E_4}{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}}\Bigg)$

Vamos mostrar que $\mathcal{B}$ é base:

- E_1,E_2,E_3,E_4 são L.I.:

$$xE_1+yE_2+zE_3+wE_4=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}x & y+w\\ y-w & z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} x=0 \\ y+w=0 \\ y-w=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x=0 \\ y=-w \\ y=w \\ z=0 \end{array} \Rightarrow x=y=z=w=0$$

- $\mathcal{M}_{2\times2}=[E_1,E_2,E_3,E_4]$: Dado $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2\times2}$, queremos encontrar $x,y,z,w\in\mathbb{R}$ t.q. $xE_1+yE_2+zE_3+wE_4=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = a \\ y+w = b \\ y-w = c \\ z = d \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} (2) \Rightarrow y = b-w \\ (3) \Rightarrow b-2w = c \Rightarrow w = \frac{b-c}{2} \Rightarrow y = \frac{b+c}{2} \end{array}$$

Logo $x = a$, $y = \frac{b+c}{2}$, $z = d$, $w = \frac{b-c}{2}$ //

Coordenadas de $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ na base B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = E_1 + E_2 + 2E_3 + 2E_4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = (1,1,2,4)_B$$

• Teorema do Completamento de Base

Prop: Sejam $v_1, \dots, v_k \in V$ vetores L.I. e seja $w \in V$

Então $v_1, \dots, v_k, w$ são L.D. $\Longleftrightarrow$ $w \in [v_1, \dots, v_k]$

Dem: ($\Leftarrow$) se $w \in [v_1, \dots, v_k]$ então $\exists\, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ t.q.

$w = x_1 v_1 + \dots + x_k v_k \Rightarrow x_1 v_1 + \dots + x_k v_k - w = 0 \Rightarrow v_1, \dots, v_k, w$ L.D.

($\Rightarrow$) Suponha $v_1, \dots, v_k, w$ L.D.

$\Rightarrow \exists\, a_1, \dots, a_k, b \in \mathbb{R}$, com $a_i \neq 0$ para algum i ou $b \neq 0$

tais que $a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + bw = 0$

Vou mostrar que $b \neq 0$: Caso contrário, se $b = 0$, teriamos

$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0$ com $a_i \neq 0$ para algum i

mas isso é impossível pois $v_1, \dots, v_k$ são L.I. $\Rightarrow b \neq 0$

Segue que $w = -\frac{a_1}{b} v_1 - \frac{a_2}{b} v_2 - \dots - \frac{a_k}{b} v_k \in [v_1, \dots, v_k]$ ∎

Teorema do Completamento

Seja $S \subset V$ um subespaço vetorial de dimensão finita. Sejam $v_1, \dots, v_k \in S$ vetores L.I. Então existem $v_{k+1}, \dots, v_d \in S$ tais que $B = (v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_d)$ é base de V.

Dem: • Se $S = [v_1, \dots, v_k]$ então $B = (v_1, \dots, v_k)$ é base de S $(k=d)$

• Se $S \neq [v_1, \dots, v_k] \Rightarrow \exists\, v_{k+1}$ tal que $v_{k+1} \in S$, $v_{k+1} \notin [v_1, \dots, v_k]$

Segue que $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$ são L.I. (pela prop. anterior)

• Se $S = [v_1, \dots, v_{k+1}]$ acabou: $B = (v_1, \dots, v_{k+1})$ é base de S $(k+1=d)$

caso contrário, $\exists\, v_{k+2} \in S$, $v_{k+2} \notin [v_1, \dots, v_{k+1}]$

$\Rightarrow$ $v_1, \dots, v_{k+2}$ L.I.

• Se $S = [v_1, \dots, v_{k+2}]$ acabou. $B = (v_1, \dots, v_{k+2})$ é base de S.

Caso contrário continua até obter uma base. $\blacksquare$

Corolário: Suponha que $\dim V = d$. Se $v_1, \dots, v_d$ são L.I.

$\Rightarrow B = (v_1, \dots, v_d)$ é base de V.

Dem: Se $B = (v_1, \dots, v_d)$ NÃO é base, podemos completar para base $B = (v_1, \dots, v_d, v_{d+1}, \dots, v_{d+k})$

$\Rightarrow \dim V = d + k > d$ ABSURDO! $\blacksquare$

Corolário Sejam $S_1, S_2 \subset V$ subespaços de dimensão finita. Se $S_1 \subset S_2$ e $\dim S_1 = \dim S_2 \Rightarrow S_1 = S_2$

Dem: Seja $B = (v_1, \dots, v_d)$ base de $S_1 \Rightarrow v_1, \dots, v_d \in S_2$ são L.I.

e $\dim S_1 = \dim S_2 = d \Rightarrow B = (v_1, \dots, v_d)$ é base de S_2

$\Rightarrow S_1 = [v_1, \dots, v_d] = S_2$ ∎

Exemplos:

1. $V = \mathbb{R}^4$, $v_1 = (1,1,-1,0)$, $v_2 = (1,0,1,1)$

Vamos completar v_1, v_2 para uma base de $\mathbb{R}^4$

Vamos fazer isso "passo a passo".

Passo 1: Encontrar $v_3 \in \mathbb{R}^4$, $v_3 \notin [v_1, v_2]$:

$[v_1, v_2] = \{x v_1 + y v_2 \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{(x+y, x, -x+y, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

Note que se $(a,b,c,d) \in [v_1, v_2]$ então $a - b = d$

Logo $\underbrace{(1,0,0,0)}_{v_3} \notin [v_1, v_2] \Rightarrow v_1, v_2, v_3$ são L.I.

Passo 2: Encontrar $v_4 \in \mathbb{R}^4$, $v_4 \notin [v_1, v_2, v_3]$

$[v_1, v_2, v_3] = \{x v_1 + y v_2 + z v_3 \mid x, y, z \in \mathbb{R}^4\} = \{(x+y+z, x, -x+y, y) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$

Note que se $(a,b,c,d) \in [v_1, v_2, v_3, v_4] \Rightarrow b + c = d$

Logo, $v_4 = (0,1,0,0) \notin [v_1, v_2, v_3] \Rightarrow v_1, v_2, v_3, v_4$ são L.I.

$\Rightarrow B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ é base de $\mathbb{R}^4$. ∎

Exemplo: Seja $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$

Seja $W = [v_1, v_2]$, $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (2,0,-1)$

$\Rightarrow S = W$. De fato, $\dim S = \dim W = 2$. Basta mostrar que $W \subset S$. Mas $v_1, v_2 \in S \Rightarrow W \subset S \Rightarrow W = S$. ∎