Def: Um espaço vetorial é um conjunto V com duas operasões

- (Soma) $V \times V \longrightarrow V$
  $(v, w) \longmapsto v+w$

- (Produto por escalar) $\mathbb{R} \times V \longrightarrow V$
  $(\lambda, v) \longmapsto \lambda v$

Satisfazendo as seguintes propriedades

1. Associatividade da Soma
   $(u+v)+w = u+(v+w) \qquad \forall u,v,w \in V$

2. Comutatividade da Soma
   $u+v = v+u \qquad \forall u,v,w \in V$

3. Elemento Neutro da Soma
   $\exists \vec{0} \in V$ tal que $v+\vec{0} = \vec{0}+v = v \qquad \forall v \in V$

4. Elemento inverso da Soma
   $v+(-1)\cdot v = \vec{0} \qquad \forall v \in V$

5. Associatividade do produto por Escalar
   $\lambda\cdot(\mu \cdot v) = (\lambda\mu)v \qquad \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in V$

6. Distributiva I
   $\lambda(v+w) = (\lambda v)+(\lambda w) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall v,w \in V$

7. Distributiva II
   $(\lambda+\mu)v = \lambda v+\mu v \qquad \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in V$

8. Unitário
   $1\cdot v = v \qquad \forall v \in V$

Exemplos:

1 $V = \mathbb{R}^n$, $(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2,\dots, x_n+y_n)$

$\lambda\cdot(x_1,\dots,x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2,\dots,\lambda x_n)$

2 $\overset{V}{\overset{\shortparallel}{P_n}}(\mathbb{R}) = \{a_0+a_1x+\dots+a_nx^n \mid a_0,\dots,a_n\in\mathbb{R}\}$

Soma: $(a_0+a_1x+\dots+a_nx^n)+(b_0+b_1x+\dots+b_nx^n) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\dots+(a_n+b_n)x^n$

Produto por escalar: $\lambda\cdot(a_0+a_1x+\dots+a_nx^n) = \lambda a_0+\lambda a_1x+\dots+\lambda a_nx^n$

3 $V = \mathbb{R}_{>0} = \{x\in\mathbb{R} \mid x>0\}$

Soma: $x \boxplus y = xy$

Produto p/ escalar: $\lambda \boxdot x = x^\lambda$

Vamos verificar os 8 axiomas de espaço vetorial neste exemplo:

1) $(x\boxplus y)\boxplus z = (xy)\boxplus z = (xy)z = x(yz) = x\boxplus(yz) = x\boxplus(y\boxplus z)$ ✓

2) $x\boxplus y = xy = yx = y\boxplus x$ ✓

3) Seja $\vec{0} = 1 \in \mathbb{R}_{>0} \Rightarrow 1\boxplus x = x^1 = x$ ✓

4) $x\boxplus(-1\boxdot x) = x\boxplus x^{-1} = x\cdot\frac{1}{x} = 1 = \vec{0}$ ✓

5) $\lambda\boxdot(\mu\boxdot x) = \lambda\boxdot x^\mu = (x^\mu)^\lambda = x^{\lambda\mu} = (\lambda\mu)\boxdot x$ ✓

6) $\lambda\boxdot(x\boxplus y) = \lambda\boxdot(xy) = (xy)^\lambda = x^\lambda y^\lambda = x^\lambda\boxplus y^\lambda = (\lambda\boxdot x)\boxplus(\lambda\boxdot y)$ ✓

7) $(\lambda+\mu)\boxdot x = x^{(\lambda+\mu)} = x^\lambda x^\mu = x^\lambda\boxplus x^\mu = (\lambda\boxdot x)\boxplus(\mu\boxdot x)$ ✓

8) $1\boxdot x = x^1 = x$ ✓

OBS: o exemplo 3 acima é melhor entendido em termos da seguinte construção geral:

- Suponha que $(V, +, \cdot)$ seja um espaço vetorial
- Suponha que $f: V \to X$ seja uma bijeção com inversa $f^{-1}: X \to V$ (onde X é um conjunto qualquer)

Então podemos usar f para induzir uma estrutura de espaço vetorial em X a partir da estrutura de espaço vetorial de V:

$$\boxed{\begin{array}{ll} x \boxplus y = f\left(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)\right) & \\ \lambda \boxdot x = f\left(\lambda \cdot f^{-1}(x)\right) & \forall x, y \in X, \ \lambda \in \mathbb{R} \end{array}}$$

Para recuperar o exemplo 3 a partir desta construção tome $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$, $f(t) = e^t$ com inversa

$$f^{-1}: \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \ln(x)$$

- Mais Exemplos

4 Seja X um conjunto qualquer, $(V, +, \cdot)$ um espaso vetorial. Seja $\mathcal{F}(X, V) = \{f: X \to V\}$. $\mathcal{F}(X, V)$ é um espaço vetorial com soma e produto por escalar:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

Caso Particular: $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$, etc...

5 Seja $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ o conjunto das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Então $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ é um esp. vet. com a mesma soma e produto por escalar de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

6 Analogamente p/ $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), \dots, C^k(\mathbb{R},\mathbb{R}), C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, etc...

7 $V = \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$

Soma: $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$

Prod. p/ Esc.: $\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$

MUITOS OUTROS EXEMPLOS!

• Transformação Linear:

Def: Sejam $(V,+,\cdot)$ e $(W,+,\cdot)$ espaços vetoriais. Uma transformação linear de V para W é uma função $T: V \to W$ que satisfaz:

- $T(v_1+v_2) = T(v_1)+T(v_2) \quad \forall v_i \in V$
- $T(\lambda v) = \lambda T(v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Exemplos:

① $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$T(x,y) = (x+y,\ x-y,\ 2x)$$

Vamos mostrar que T é linear:

1) $T((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) = T(x_1+x_2,\ y_1+y_2) =$

$$= ((x_1+x_2)+(y_1+y_2),\ (x_1+x_2)-(y_1+y_2),\ 2(x_1+x_2))$$

$$= ((x_1+y_1)+(x_2+y_2),\ (x_1-y_1)+(x_2-y_2),\ 2x_1+2x_2)$$

$$= (x_1+y_1,\ x_1-y_1,\ 2x_1) + (x_2+y_2,\ x_2-y_2,\ 2x_2)$$

$$= T(x_1,y_1) + T(x_2,y_2)$$

2) $T(\lambda(x,y)) = T(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x+\lambda y,\ \lambda x-\lambda y,\ 2\lambda x)$

$$= (\lambda(x+y),\ \lambda(x-y),\ \lambda(2x)) = \lambda(x+y,\ x-y,\ 2x)$$

$$= \lambda T(x,y).$$

OBS: Note que a imagem de T:

$\mathrm{Im}(T) = \{(x+y, x-y, 2x) \mid x,y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ é

um plano que passa pela origem de $\mathbb{R}^3$

e tem vetores diretores $u=(1,1,2)$, $v=(1,-1,0)$

② $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$T(x,y,z) = 2x-y+z$$

Note que

$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x,y,z)=0\}$ é um plano

c/ eq. geral $2x-y+z=0$

③ $D: C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow C(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$D(f) = f'$$

(Muitos Outros Exemplos!)

__Prop__: Se $T: V \to W$ é uma transformação linear então $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$

__Dem__: $\vec{0}_V = 0 \cdot v$, $v \in V$

$\Rightarrow T(\vec{0}_V) = T(0 \cdot v) = 0 \cdot T(v) = \vec{0}_W$ ∎

__Exemplo__:

① $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (x-y+2, y+1)$

NÃO É LINEAR pois $T(0,0) = (2,1) \neq (0,0)$

② $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$T(x,y) = (x+y^2, x)$ Satisfaz $T(0,0) = (0,0)$, mas NÃO É LINEAR

$$T(\lambda(x,y)) = T(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x + \lambda^2 y^2, \lambda x) = \lambda(x + \lambda y^2, x)$$

mas $\lambda T(x,y) = \lambda(x+y^2, x) = (\lambda x + \lambda y^2, \lambda x)$

Ou seja Não é verdade que $T(\lambda(x,y)) = \lambda T(x,y)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$: Por exemplo, $\lambda = 2$, $x = 0$, $y = 1$

$2 \cdot (0,1) = (0,2)$, $T(0,2) = (4,0)$, $2 \cdot T(0,1) = 2(1,0) = (2,0) \neq (4,0)$

3. Note que $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $T(x)=e^x$ NÃO é linear, mas

$$T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{>0}, \quad x\mapsto e^x$$ (Exemplo 3 da página 2) é linear

Vamos verificar isso:

- $T(x+y)=e^{x+y}=e^x e^y = e^x \boxplus e^y = T(x)\boxplus T(y)$ ✓
- $T(\lambda x)=e^{\lambda x}=(e^x)^\lambda = \lambda \boxdot e^x = \lambda\boxdot T(x)$ ✓

Prop: Seja $T:V\to W$ uma transformação linear bijetora. Então $T^{-1}:W\to V$ é linear.

Dem: Seja $w_1=T(v_1)$, $w_2=T(v_2)$ (Lembre que T é sobrejetora!)

$$\Rightarrow T^{-1}(w_1+w_2) = T^{-1}(T(v_1)+T(v_2)) \underset{T \text{ é linear}}{=} T^{-1}(T(v_1+v_2)) \underset{T^{-1}\circ T = Id_V}{=} v_1+v_2 =$$

$$= T^{-1}(w_1)+T^{-1}(w_2) \checkmark$$

$$T^{-1}(\lambda w) \underset{w=T(v)}{=} T^{-1}(\lambda T(v)) \underset{T \text{ linear}}{=} T^{-1}(T(\lambda v)) \underset{T^{-1}\circ T=Id_V}{=} \lambda v = \lambda T^{-1}(w) \checkmark$$

Def: Uma transformação linear bijetora $T:V\to W$ é um <u>isomorfismo</u>. Se existir um isomorfismo $T:V\to W$ dizemos que V e W são <u>isomorfos</u> e escrevemos $V\cong W$

Exemplos:

(1) $P_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n+1}$

Isomorfismo: $T(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) = (a_0, a_1, \dots, a_n)$

(2) $\mathcal{M}_{m\times n} \cong \mathbb{R}^{mn}$

$$T\left(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\right) = (a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn})$$

(3) A composta de isomorfismos é um isomorfismo, logo $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \cong P_{mn-1}(\mathbb{R})$

(4) Seja $X = \{1, \dots, n\}$ então $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}^m) \cong \mathcal{M}_{m\times n}$

$$T : \mathcal{F}(X, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{M}_{m\times n}$$

$$T(f) = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ f(1) & f(2) & \cdots & f(n) \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

OBS: $f(1) \in \mathbb{R}^m \Rightarrow f(1) = (f_{11}, f_{21}, \dots, f_{m1})$

$f(2) \in \mathbb{R}^m \Rightarrow f(2) = (f_{12}, f_{22}, f_{32}, \dots, f_{m2})$

$\vdots$

$$T(f) = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{m1} & \cdots & f_{mn} \end{pmatrix}$$