

1. Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma transformação linear. Sabendo que  $T(-1, 2) = (0, 3)$  e  $T(2, 1) = (-2, 0)$ , determine  $T(1, 1)$ .
2. Sejam  $A$  e  $B$  duas matrizes  $m \times n$ . Mostre que se  $AX = BX$  para todo  $X \in \mathbb{R}^n$  (pensando em  $X$  como uma matriz  $n \times 1$ ), então  $A = B$ . Dê um exemplo de duas matrizes  $2 \times 2$  e um vetor  $X \in \mathbb{R}^2$  tais que  $X \neq 0$ ,  $AX = BX$ , mas  $A \neq B$  (isto mostra que na primeira afirmação importante que  $AX = BX$  para todo  $X \in \mathbb{R}^n$ ).
3. Seja  $T : V \rightarrow W$  uma aplicação linear e sejam  $w_1, w_2, \dots, w_n$  vetores linearmente independentes de  $W$ . Mostre que se  $v_1, v_2, \dots, v_n$  são vetores de  $V$  tais que  $T(v_i) = w_i$ , então  $v_1, v_2, \dots, v_n$  são linearmente independentes. A recíproca é verdadeira? Ou seja, é verdade que se  $v_1, v_2, \dots, v_n$  são linearmente independentes então  $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)$  são linearmente independentes? Prove ou dê um contra exemplo.
4. Seja  $V$  um espaço vetorial e  $T : V \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação linear. Suponha que  $N(T) \neq V$  (onde  $N(T)$  é o núcleo de  $T$ ) e seja  $v_0 \in V$  tal que  $T(v_0) \neq 0$ .
  - (a) Mostre que todo elemento  $v \in V$  pode ser escrito da forma  $v = w + av_0$  onde  $w \in N(T)$  e  $a \in \mathbb{R}$ .
  - (b) Seja  $S = [v_0]$  o subespaço gerado por  $v_0$ . Mostre que  $V = S \oplus N(T)$ .
  - (c) Mostre que se  $(v_1, \dots, v_n)$  é uma base de  $N(T)$ , então  $(v_0, v_1, \dots, v_n)$  é base de  $V$ .
5. Seja  $T : V \rightarrow W$  uma aplicação linear injetora. Mostre que se  $v_1, \dots, v_n \in V$  são linearmente independentes então  $T(v_1), \dots, T(v_n) \in W$  são linearmente independentes.
6. Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais tais que  $\dim V > \dim W$ . Mostre que se  $T : V \rightarrow W$  é uma transformação linear então  $N(T) \neq \{0\}$ .
7. Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais tais que  $\dim V < \dim W$ . Mostre que se  $T : V \rightarrow W$  é uma transformação linear então  $\text{Im}(T) \neq W$ .
8. Sejam  $F : V \rightarrow W$  e  $G : W \rightarrow U$  aplicações lineares. Mostre que:
  - (a)  $\dim(\text{Im}(G \circ F)) \leq \dim(\text{Im}G)$ .
  - (b)  $\dim(\text{Im}(G \circ F)) \leq \dim(\text{Im}F)$ .
9. Seja  $V$  o espaço das funções de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  que admitem derivadas de todas as ordens.
  - (a) Seja  $D : V \rightarrow V$  a transformação  $D(f) = f'$  que associa a cada função a sua derivada. Mostre que  $D$  é uma aplicação linear.
  - (b) Mostre que o núcleo de  $D$  é o subespaço das funções constantes (que é isomorfo a  $\mathbb{R}$ ).
  - (c) Seja  $D^2 = D \circ D : V \rightarrow V$  a transformação que associa a cada função a sua segunda derivada. Mostre que o núcleo de  $D^2$  é o subespaço das funções da forma  $N(D^2) = \{f(x) = ax + b : a, b \in \mathbb{R}\}$ .
  - (d) Determine o núcleo da transformação  $D^n : V \rightarrow V$  que associa a cada função a sua  $n$ -ésima derivada.

10. Seja  $T : \mathcal{M}_{4 \times 4} \rightarrow \mathcal{M}_{4 \times 4}$  a transformação dada por

$$T(A) = \frac{A + A^t}{2},$$

onde  $A^t$  denota a transposta da matriz  $A$ .

(a) Mostre que a imagem de  $T$  é o subespaço das matrizes simétricas

$$\mathcal{S} = \{B \in \mathcal{M}_{4 \times 4} : B = B^t\}.$$

(b) Mostre que  $N(T)$  é o subespaço das matrizes anti-simétricas

$$\mathcal{A} = \{B \in \mathcal{M}_{4 \times 4} : B = -B^t\}.$$

(c) Mostre que  $\dim \mathcal{S} + \dim \mathcal{A} = 16$ .

(d) Mostre que  $\mathcal{M}_{4 \times 4} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$ .

11. Uma transformação linear  $T : V \rightarrow V$  é dita **idenpotente** se  $T^2 = T$  onde  $T^2 = T \circ T$ . Seja  $T : V \rightarrow V$  uma aplicação linear idenpotente.

(a) Mostre que  $V = N(T) \oplus \text{Im}(T)$ .

(b) Escreva a matriz da transformação  $T$  em termos de uma base  $B = (v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n)$  onde  $(v_1, \dots, v_p)$  é uma base de  $\text{Im}(T)$  e  $(v_{p+1}, \dots, v_n)$  é uma base de  $N(T)$ .

(c) Verifique que a aplicação do exercício anterior é idenpotente.

(d) Mostre que a transformação linear

$$F = I - T : V \rightarrow V, \quad F(v) = v - T(v)$$

também é idenpotente.

(e) Mostre que  $N(F) = \text{Im}(T)$  e  $\text{Im}(F) = N(T)$ .

OBS: Uma transformação linear idenpotente muitas vezes também é chamada de uma projeção.

12. Seja  $v \in \mathbb{R}^3$  um vetor não nulo e seja  $T_v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a aplicação linear dada por

$$T_v(w) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|^2} v,$$

onde  $\langle v, w \rangle$  denota o produto escalar de  $v$  com  $w$ .

(a) Mostre que  $T_v$  é uma aplicação linear idenpotente.

(b) Mostre que  $N(T) = v^\perp$ , onde  $v^\perp$  é o plano que passa pela origem e que tem  $v$  como um vetor normal.

(c) Conclua que  $\mathbb{R}^3 = v^\perp \oplus [v]$ .

13. Seja  $T_v$  a aplicação linear do exercício anterior. Seja  $v = (-1, 1, 2)$  na base canônica de  $\mathbb{R}^3$ . Escreva as matrizes das transformações  $T_v$  e  $I - T_v$  na base canônica de  $\mathbb{R}^3$ .

14. O produto escalar (ou produto interno) de  $\mathbb{R}^n$  é a função

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Seja  $u \in \mathbb{R}^n$ . Mostre que a função

$$T_u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad T_u(v) = \langle u, v \rangle$$

é uma aplicação linear. Se  $u = (x_1, \dots, x_n)$ , escreva a matriz da aplicação linear  $T_u$  com respeito as bases canônicas de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}$ .

15. Sejam  $e_1, \dots, e_n$  os vetores que formam a base canônica de  $\mathbb{R}^n$ , ou seja

$$e_i = (x_1, \dots, x_n) \text{ com } x_i = 1 \text{ e } x_j = 0 \text{ para todo } j \neq i.$$

Mostre que a função

$$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad T(u) = (\langle e_1, u \rangle, \langle e_2, u \rangle, \dots, \langle e_n, u \rangle)$$

é uma aplicação linear. Determine a sua matriz com respeito a base canônica de  $\mathbb{R}^n$ .

16. Dado um subespaço vetorial  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , definimos o seu complemento ortogonal como sendo

$$S^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n : \langle u, v \rangle = 0 \text{ para todo } v \in S\}.$$

Mostre que  $S^\perp$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^n$ . Mostre que  $\mathbb{R}^n = S \oplus S^\perp$ .

17. Dado um subespaço vetorial  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  definimos a projeção ortogonal de  $\mathbb{R}^n$  em  $S$  como sendo a função

$$P_S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

definida pelas seguintes condições:

- $P_S$  é linear;
- $P_S(u) \in S$  para todo  $u \in \mathbb{R}^n$ ;
- $u - P_S(u) \in S^\perp$  para todo  $u \in \mathbb{R}^n$ .

Mostre que

- $P_S \circ P_S = P_S$ .
- A imagem de  $P_S$  é  $S$ .
- O núcleo de  $P_S$  é  $S^\perp$ .
- $P_{S^\perp} = I_{\mathbb{R}^n} - P_S$  onde  $I_{\mathbb{R}^n}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a função identidade (ou seja  $I_{\mathbb{R}^n}(u) = u$ ) e  $P_{S^\perp}$  denota a projeção ortogonal no subespaço  $S^\perp$ .
- $P_{S^\perp} \circ P_{S^\perp} = P_{S^\perp}$ .
- A imagem de  $P_{S^\perp}$  é  $S^\perp$ .
- O núcleo de  $P_{S^\perp}$  é  $S$ .
- $(S^\perp)^\perp = S$ .

18. Seja  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$  uma matriz com  $m$  linhas e  $n$  colunas. Denote por  $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$  os vetores formados pelas linhas de  $A$  e por  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$  os vetores formados pelas colunas de  $A$ . Seja  $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  a transformação linear determinada pela matriz  $A$ . Mostre que

(a)  $\text{Im}(T_A) = [v_1, \dots, v_n]$ .

(b)  $N(T_A)^\perp = [u_1, \dots, u_m]$ .

(c) A quantidade de linhas linearmente independentes de  $A$  é igual a quantidade de colunas linearmente independentes de  $A$ .

[DICA: Para demonstrar o item (c) utilize o teorema do núcleo e da imagem que diz o seguinte: Se  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma aplicação linear então  $\dim(N(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = n$ .]

19. Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais. O produto cartesiano de  $V$  com  $W$  é o espaço vetorial  $V \times W = \{(v, w) : v \in V, w \in W\}$  com soma e produto por escalar dados por

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2), \quad a(v, w) = (av, aw).$$

(a) Mostre que se  $(v_1, \dots, v_n)$  é base de  $V$  e  $(w_1, \dots, w_m)$  é base de  $W$  então uma base de  $V \times W$  é dada por

$$B = ((v_1, 0), \dots, (v_n, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_m)).$$

Conclua que  $\dim(V \times W) = \dim V + \dim W$ .

(b) Seja  $S$  um subespaço de  $V$ . Mostre que

$$\Delta_S = \{(u, u) \in V \times V : u \in S\} \subset V \times V$$

é um subespaço de  $V \times V$ .

(c) Mostre que  $\dim S = \dim \Delta_S$ .

(d) Mostre que se  $S_1$  e  $S_2$  são subespaços de  $V$  então a aplicação

$$T : S_1 \times S_2 \rightarrow V, \quad T(u_1, u_2) = u_1 - u_2$$

é uma aplicação linear.

(e) Mostre que  $\text{Im}(T) = S_1 + S_2$

(f) Mostre que  $N(T) = \{(u, u) \in S_1 \times S_2 : u \in S_1 \cap S_2\} = \Delta_{S_1 \cap S_2} \subset S_1 \times S_2$ .

(g) Utilize o teorema do núcleo e da imagem para mostrar que

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2).$$

20. Seja  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  o espaço de todas as funções de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  que admitem derivadas de todas as ordens e seja  $S \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$  o subespaço gerado por  $S = [\text{sen}x, \text{cos}x]$ . Seja  $D : S \rightarrow S$  a aplicação linear que associa a cada função a sua primeira derivada. Qual é a matriz da transformação  $D$  com respeito a base  $B = (\text{sen}x, \text{cos}x)$  de  $S$ ?

21. Considere a aplicação linear  $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$  dada por

$$T(p(t)) = p'(t) + p'(1) - 2p(0) + p(t).$$

(a) Determine a matriz de  $T$  com respeito a base  $B = (1, t, t^2)$ .

(b) Determine a matriz de  $T$  com respeito a base  $B = (1 + t, 1 - t, 1 - t^2)$ .

22. Resolva os exercícios 18 a 27 da lista da poli (no link abaixo) para treinar escalonamento e análise das soluções de sistemas lineares:

<https://www.ime.usp.br/mat/3457/Listas/2017/Lista1%20-MAT3457%20-%202017.pdf>