MAT134 - 2019 - Introdução à Álgebra Linear – Lista 1

1. Verique se $V = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}^2\}$ é um espaço vetorial com as operações de soma e produto por escalar dadas abaixo. Caso não seja um espaço vetorial, determine todos os axiomas que falham. Justifique suas respostas.
   (a) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$; $\alpha \odot (x, y) = (\alpha x, \alpha y)$.
   (b) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1, y_1)$; $\alpha \odot (x, y) = (\alpha x, \alpha y)$.
   (c) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$; $\alpha \odot (x, y) = (x, \alpha y)$.
   (d) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (2x_1 - 2y_2, -x_2 + y_1)$; $\alpha \odot (x, y) = (x, \alpha y)$.
   (e) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 - 1, y_1 + y_2 + 2)$; $\alpha \odot (x, y) = (\alpha x - \alpha + 1, \alpha y + 2\alpha - 2)$.

2. Seja $V = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ com as operaes de adio e de multiplicao por escalares dadas por: $x \oplus y = xy$ e $\alpha \odot x = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Verifique se V é um espaço vetorial com estas operações.

3. Em cada um dos itens abaixo, verifique se a função definida é ou não uma aplicação linear. No caso em que é uma aplicação linear, determine o núcleo e a imagem da função.
   (a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (2x - y, x + y + z, y - 2x)$;
   (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (2x - y, x + y + z, x + z)$;
   (c) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z, w) = (x - y + 2w, y - x - 2w)$;
   (d) $T_v : V^3 \to \mathbb{R}$, $T_v(w) = v \cdot w$ (onde $v \cdot w$ denota o produto escalar de v com w e $v \neq 0 \in V^3$.
   (e) $T : P_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$, $T(p) = (p(0), p(-1), p(1))$.
   (f) $T : P_3(\mathbb{R}) \to \mathrm{F}(\mathbb{R})$, $T(p)(t) = 2p''(t) - p'(t) + 3p(-1)$
   (g) $T : \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$, $T(A) = A - A^t$,onde A^t denota a matriz transposta de A. Ou seja,
$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

4. Seja $p(x) \in P_2(\mathbb{R})$ um polinômio de grau menor ou igual a 2. Mostre que se $p(1) = 0$, então existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que
$$p(x) = \lambda(x - 1) + \mu(x^2 - 1).$$
   Note a seguinte interpretação geométrica deste resultado: podemos pensar no conjunto
$$S = \{p(x) \in P_2(\mathbb{R}) : p(1) = 0\} \subset P_2(\mathbb{R})$$
   como um plano que passa pela origem de $P_2(\mathbb{R})$ e que tem os polinômios $x - 1$ e $x^2 - 1$ como vetores diretores.

5. Verifique se S é um subespaço vetorial do espaço vetorial V nos seguintes casos:
   (a) $V = \mathbb{R}^3$ e $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$.
   (b) $V = \mathbb{R}^3$ e $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x$ é um número inteiro$\}$.
   (c) $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (o conjunto das matrizes 2 por 2 com entradas números reais) e $S = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$.
   (d) $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (o conjunto das matrizes 2 por 2 com entradas números reais) e $S = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \det A = 0\}$.
   (e) $V = P_3(\mathbb{R})$ e $S = \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p(t) \geq 0,$ para todo $t \in \mathbb{R}\}$.
   (f) $V = P_5(\mathbb{R})$ e $S = \{p \in P_5(\mathbb{R}) : p(0) = 2p(1)\}$.
   (g) $V = P_n(\mathbb{R})$ e $S = \{p \in P_n(\mathbb{R}) : p'(0) = 2p(1)$ e $p(2) = 0\}$.
   (h) $V = P_3(\mathbb{R})$ e $S = \{ax + bx^3 : a, b \in \mathbb{R}\}$.

6. Seja $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ com a soma e multiplicação por escalar usual no espaço de funções. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$:

$$S_1 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(t) = f(1 + t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\};$$

$$S_2 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(t) \text{ é um número inteiro para todo } t \in \mathbb{R}\};$$

$$S_3 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(s + t) = f(s) + f(t) \text{ para todo } s, t \in \mathbb{R}\}.$$

   Determine quais desses conjuntos são subespaços vetoriais de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$. Justifique sua resposta com uma demonstração.

7. Considere o conjunto

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } a > 0, b > 0, c > 0, d > 0 \right\}$$

   e as seguintes operações de soma e produto por escalar:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \boxplus \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & by \\ cz & dw \end{pmatrix}$$

$$\lambda \boxdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^\lambda & b^\lambda \\ c^\lambda & d^\lambda \end{pmatrix}$$

   Considere também o seguinte subconjunto de V

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V : ad = 1 \text{ e } ac = 1 \right\}.$$

(a) Mostre que V com as operações definidas acima é um espaço vetorial.

(b) Mostre que S é um subespaço vetorial.

(c) Considere a aplicação

$$T : V \to V, \quad T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab^{-1} & a^{-1}b \\ cd & c^2d \end{pmatrix}.$$

Mostre que T é uma aplicação linear.

(d) Mostre que a imagem de T é o subespaço

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & x^{-1} \\ y & z \end{pmatrix} \in V : x, y, z \in \mathbb{R} \text{ e } x > 0, y > 0, z > 0 \right\}.$$

(e) Mostre que o núcleo de T é o subespaço

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in V : a > 0 \right\}.$$