MAT 134 - 2018 $\quad$ Teste 1

1) Considere a função $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ dada por:

$$T(x,y,z) = (x-2y+z, x+y-z, x-5y+3z, 3x-3y+z)$$

a) Mostre que T é aplicação linear.

Precisamos verificar que para todos $u, v \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, Temos

$$T(u+v) = T(u) + T(v)$$
$$T(\alpha u) = \alpha T(u).$$

i) Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$, $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$. Temos:

$$\begin{aligned}
T(u+v) &= T((u_1,u_2,u_3) + (v_1,v_2,v_3)) \\
&= T((u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3)) \\
&= ((u_1+v_1)-2(u_2+v_2)+(u_3+v_3), (u_1+v_1)+(u_2+v_2)-(u_3+v_3), (u_1+v_1)-5(u_2+v_2)+3(u_3+v_3), 3(u_1+v_1)-3(u_2+v_2)+(u_3+v_3)) \\
&= ((u_1-2u_2+u_3)+(v_1-2v_2+v_3), (u_1+u_2-u_3)+(v_1+v_2-v_3), (u_1-5u_2+3u_3)+(v_1-5v_2+3v_3), (3u_1-3u_2+u_3)+(3v_1-3v_2+v_3)) \\
&= (u_1-2u_2+u_3, u_1+u_2-u_3, u_1-5u_2+3u_3, 3u_1-3u_2+u_3) \\
&\quad + (v_1-2v_2+v_3, v_1+v_2-v_3, v_1-5v_2+3v_3, 3v_1-3v_2+v_3) \\
&= T(u_1,u_2,u_3) + T(v_1,v_2,v_3) \\
&= T(u) + T(v).
\end{aligned}$$

ii) Seja $u \in \mathbb{R}^3$, $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Temos:

$$\begin{aligned}
T(\alpha u) &= T(\alpha(u_1,u_2,u_3)) \\
&= T((\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)) \\
&= (\alpha u_1 - 2\alpha u_2 + \alpha u_3, \alpha u_1 + \alpha u_2 - \alpha u_3, \alpha u_1 - 5\alpha u_2 + 3\alpha u_3, 3\alpha u_1 - 3\alpha u_2 + \alpha u_3) \\
&= (\alpha(u_1-2u_2+u_3), \alpha(u_1+u_2-u_3), \alpha(u_1-5u_2+3u_3), \alpha(3u_1-3u_2+u_3)) \\
&= \alpha(u_1-2u_2+u_3, u_1+u_2-u_3, u_1-5u_2+3u_3, 3u_1-3u_2+u_3) \\
&= \alpha T(u_1,u_2,u_3) \\
&= \alpha T(u)
\end{aligned}$$

Portanto, T é aplicação linear.

b) Encontre a matriz de T.

A matriz de T é construída colocando-se as coordenadas de T(1,0,0), T(0,1,0), T(0,0,1) na base canonica nas colunas, ou seja,

$$A_T = \begin{bmatrix} | & | & | \\ T(1,0,0) & T(0,1,0) & T(0,0,1) \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

Observe que:

$T(1,0,0) = (1, 1, 1, 3)$

$T(0,1,0) = (-2, 1, -5, -3)$

$T(0,0,1) = (1, -1, 3, 1)$

Portanto

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

c) Encontre uma base e determine a dimensão de $N(T)$, onde

$$N(T) = \{ u \in \mathbb{R}^3 : T(u) = 0 \}$$

denota o núcleo de T.

Seja $u \in \mathbb{R}^3$. Se $u = (x, y, z)$, temos que

$$u \in N(T) \iff T(u) = 0$$

$$\iff (x-2y+z, x+y-z, x-5y+3z, 3x-3y+z) = (0,0,0,0),$$

ou seja, $u \in N(T)$ se e somente se

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ x+y-z=0 \\ x-5y+3z=0 \\ 3x-3y+z=0 \end{cases}$$

Precisamos resolver este sistema. Escalonando obtemos o sistema equivalente

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3y-2z=0 \\ -3y+2z=0 \\ 3y-2z=0 \end{cases} \sim \begin{cases} x-2y+z=0 & \text{(i)} \\ 3y-2z=0 & \text{(ii)} \end{cases}$$

Fazendo $\boxed{z=\lambda}$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$ é arbitrário, temos

$$\text{(ii)} \Rightarrow y = \frac{2z}{3} = \frac{2}{3}\lambda$$

$$\text{(i)} \Rightarrow x - 2\left(\frac{2}{3}\lambda\right) + \lambda = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}\lambda$$

Portanto, $u \in N(T)$ se e somente se

$$u = (x, y, z) = \left(\frac{1}{3}\lambda, \frac{2}{3}\lambda, \lambda\right) = \lambda\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right),$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Concluímos então que
$$N(T)=\{\lambda(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3},1)$$

ou seja,
$$N(T)=[(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3},1)]$$

Como $\{(\frac{1}{3},\frac{2}{3},1)\}$ é conjunto de vetores L.I que gera $N(T)$, concluímos que $((\frac{1}{3},\frac{2}{3},1))$ é uma base para $N(T)$. Com isto temos que $\dim(N(T))=1$.

---

d) Encontre uma base e determine a dimensão de $Im(T)$ onde
$$Im(T)=\{v\in\mathbb{R}^4 : v=T(u) \text{ para algum } u\in\mathbb{R}^3\}$$
denota a imagem de T.

Temos que
$$v\in Im(T) \Leftrightarrow v=T(x,y,z), \text{ para algum } (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$
$$\Leftrightarrow v=(x-2y+z,\, x+y-z,\, x-5y+3z,\, 3x-3y+z)$$
$$\Leftrightarrow v=x(1,1,1,3)+y(-2,1,-5,-3)+z(1,-1,3,1)$$

Desta forma temos que
$$Im(T)=[(1,1,1,3),(-2,1,-5,-3),(1,-1,3,1)].$$

Vamos encontrar uma base para este conjunto gerador, ou seja, vamos encontrar um subconjunto L.I. Se $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ são tais que
$$\alpha(1,1,1,3)+\beta(-2,1,-5,-3)+\gamma(1,-1,3,1)=(0,0,0,0) \quad (*)$$
então
$$\begin{cases}\alpha-2\beta+\gamma=0\\ \alpha+\beta-\gamma=0\\ \alpha-5\beta+3\gamma=0\\ 3\alpha-3\beta+\gamma=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta=\frac{2}{3}\gamma\\ \alpha=\frac{1}{3}\gamma\end{cases}$$
como na resolução do sistema do item anterior.

Portanto o conjunto $\{(1,1,1,3),(-2,1,-5,-3),(1,-1,3,1)\}$ é L.D..
De fato, tomando $\gamma=1$ na equação $\circledast$, temos $\alpha=\frac{1}{3}$, $\beta=\frac{2}{3}$ e

$$\frac{1}{3}(1,1,1,3)+\frac{2}{3}(-2,1,-5,-3)+(1,-1,3,1)=(0,0,0,0),$$

ou seja, escrevemos o vetor $(1,-1,3,1)$ como combinação linear dos demais:

$$(1,-1,3,1)=-\frac{1}{3}(1,1,1,3)-\frac{2}{3}(-2,1,-5,-3).$$

Note $\{(1,1,1,3),(-2,1,-5,-3)\}$ é LI.. De fato, se tomarmos $\gamma=0$ na equação $\circledast$, teremos

$$\alpha(1,1,1,3)+\beta(-2,1,-5,-3)=(0,0,0,0) \Rightarrow \alpha=0 \text{ e } \beta=0$$

Portanto concluimos que $((1,1,1,3),(-2,1,-5,-3))$ é base de $Im(T)$ e $\dim(Im(T))=2$.