MAT134 – 2018 – Prova 1

Nome: ____________________

Número USP/Turma: ____________________

Escolha quatro dos exercícios abaixo para resolver. Indique claramente qual dos exercícios não deve ser corrigido. Caso você resolva os cinco exercícios eu só irei corrigir os quatro primeiros. Note que o valor total dos pontos de cada exercício varia. Escolha bem quais você irá fazer.

Justifique todos os passos da sua resposta! Boa Prova!

1. Considere a função $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$T(x, y, z) = (x - 2y + z, x + y - z, x - 5y + 3z).$$

   (a) (0,5 pontos) Mostre que T é uma aplicação linear.

   (b) (0,5 pontos) Encontre uma base e determine a dimensão de $N(T)$, onde

$$N(T) = \{u \in \mathbb{R}^3 : T(u) = 0\}$$

   denota o núcleo de T.

   (c) (0,5 ponto) Encontre uma base e a determine a dimensão de $Im(T)$, onde

$$Im(T) = \{v \in \mathbb{R}^3 : v = T(u) \text{ para algum } u \in \mathbb{R}^3\}$$

   denota a imagem de T.

2. Considere o subespaço $S_1 \subset \mathbb{R}^4$ descrito em termos de geradores por

$$S_1 = [(1,0,1,-1),(-1,0,-1,2)].$$

Seja $S_2 = (S_1)^{\perp}$ o complemento ortogonal de S_1, i.e.,

$$S_2 = \{u \in \mathbb{R}^4 :< u, v >= 0 \text{ para todo } v \in S_1\},$$

onde $< u, v >$ denota o produto escalar de u e v. (Lembre que se $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ e $v = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ então $< u, v >= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$.) Seja $S_3 \subset \mathbb{R}^4$ o subespaço descrito em termos de geradores por

$$S_3 = [(-1,2,-2,1),(2,-1,4,-2)]$$

(a) (1 ponto) Encontre uma base e determine a dimensão de S_2.

(b) (1 ponto) Encontre uma base e determine a dimensão de $S_2 \cap S_3$.

(c) (1 ponto) Complete a base que você encontrou de $S_2 \cap S_3$ para uma base de $S_2 + S_3$. Determine a dimensão de $S_2 + S_3$

3. Decida se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta com uma demonstração no caso da afirmação ser verdadeira, ou um contra-exemplo no caso da afirmação ser falsa.

   (a) (1,5 ponto) Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço vetorial e $v_1, \ldots, v_k \in S$ vetores quaisquer. Se $u \in \mathbb{R}^n$ é um vetor que **não pertence** a S então necessariamente $v_1, \ldots, v_k, u$ são vetores linearmente independentes.

   (b) (1,5 pontos) Se $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ são vetores linearmente independentes e $u \in \mathbb{R}^n$ é um vetor que **não pertence** a $[v_1, \ldots, v_k]$ então necessariamente $v_1, \ldots, v_k, u$ são vetores linearmente independentes.

4. Considere os subespaços $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^4$ descritos em termos de geradores por

$$S_1 = [(1,0,1,-1),(-1,1,0,2)], \quad S_2 = [(1,1,2,0),(-1,1,0,2),(-1,2,-1,7)].$$

(a) (1 ponto) Mostre que $S_1 \subset S_2$.

(b) (1 ponto) Mostre que $S_2 \not\subset S_1$.

(c) (1 ponto) Complete os vetores $(1,0,1,-1),(-1,1,0,2)$ para uma base de S_2. Explique como vc encontrou o(s) vetor(es) necessário(s) para completar a base.

5. Considere a aplicação linear

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x, y) = (x - y, 2x + y, x + y)$$

e as bases $\mathcal{F} = (f_1, f_2)$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{G} = (g_1, g_2, g_3)$ de $\mathbb{R}^3$, onde

$$f_1 = (1, 1), \quad f_2 = (1, -1),$$

e

$$g_1 = (1, 1, 0), \quad g_2 = (0, 1, 1), \quad g_3 = (1, 0, 1).$$

(a) (2 pontos) Encontre a matriz de T com respeito as bases $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$.

(b) (0,5 pontos) Se $u = (2, 4)_{\mathcal{F}}$, encontre as coordenadas de $T(u)$ na base $\mathcal{G}$.