

MAT134 - Introdução à Álgebra Linear – Lista 4

1. Calcule o determinante das seguintes matrizes. Explique detalhadamente como você fez o cálculo (se vc usou alguma fórmula escreva ela, se vc usou as propriedades escreva quais, etc...). Decida se a matriz é invertível e caso seja encontre a matriz inversa.

(a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(e)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(f)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 6 & 6 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 15 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

(g)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Mostre que se A é uma matriz 2×2 e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $\text{Det}(\lambda A) = \lambda^2 \text{Det}(A)$.

O que podemos dizer sobre $\text{Det}(\lambda A)$ quando A é uma matriz $n \times n$?

(Dica: Para resolver este exercício basta usar que o determinante é multilinear nas linhas da matriz)

3. Sejam A e B matrizes 4×4 invertíveis tais que

$$\text{Det} \left(3B^3 (A^2 B^2)^{-1} \right) = 162, \quad \text{Det} B = 2 \text{det} A.$$

Determine os valores de $\text{Det} A$ e $\text{Det} B$.

4. Em cada item abaixo é dada uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ representada por uma matriz na base canônica de \mathbb{R}^2 . Para cada uma dessas transformações faça o seguinte: (i) Encontre todos os autovalores; (ii) Encontre uma base de cada autoespaço; (iii) Determine as multiplicidades algébricas e geométricas de cada autovalor; (iv) determine se a transformação linear é diagonalizável (JUSTIFIQUE CLARAMENTE SUA RESPOSTA!); (v) Caso seja diagonalizável, encontre uma base de autovetores e escreva a matriz da transformação T nessa base.

(a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(e)

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(f)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(g)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Em cada item abaixo é dada uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ representada por uma matriz na base canônica de \mathbb{R}^3 . Para cada uma dessas transformações faça o seguinte: (i) Encontre todos os autovalores; (ii) Encontre uma base de cada autoespaço; (iii) Determine as multiplicidades algébricas e geométricas de cada autovalor; (iv) determine se a transformação linear é diagonalizável (JUSTIFIQUE CLARAMENTE SUA RESPOSTA!); (v) Caso seja diagonalizável, encontre uma base de autovetores e escreva a matriz da transformação T nessa base.

(a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

DICA: $t = -2$ é uma raiz do polinômio $t^3 - 6t^2 + 32$.

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

DICA: $t = -2$ é uma raiz do polinômio $t^3 - 12t - 16$.

(c)

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

DICA: $t = -2$ é uma raiz do polinômio $t^3 - 2t + 4$.

(d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

DICA: $t = 1$ é uma raiz do polinômio $t^3 - t^2 - t + 1$.

6. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcule a matriz A^{37} .

(b) Seja A^{-1} a matriz inversa de A . Calcule a matriz A^{-1} .

(c) Calcule a matriz $(A^{-1})^{13}$.

DICA: Se B é uma matriz invertível e $n \in \mathbb{N}$, então $(BAB^{-1})^n = BA^nB^{-1}$ e portanto $A^n = B^{-1}(BAB^{-1})^nB$. Escolha uma base boa para fazer a conta!

Analogamente, $(BAB^{-1})^{-1} = B^{-1}A^{-1}B$ e portanto $A^{-1} = B(BAB^{-1})^{-1}B^{-1}$.

7. Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear e suponha que v_1, \dots, v_n sejam autovetores de T correspondentes a autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ onde $\lambda_i \neq \lambda_j$ para todo $i \neq j$. Mostre que v_1, \dots, v_n são linearmente independentes. (Dica: a demonstração deve ser feita por indução em n ; o número de vetores. Faça o argumento nos casos $n = 1, 2, 3$ para entender o que está acontecendo e depois escreva o argumento geral.)