MAT134 - Introdução à Álgebra Linear – Lista 2

1. Em cada um dos itens abaixo decida se $S_1 \subset S_2$, $S_2 \subset S_1$, $S_1 = S_2$ ou se nenhuma das opções anteriores é verdadeira. Justifique sua resposta! Por exemplo, se $S_1 \subset S_2$ demonstre a afirmação, caso contrário encontre um elemento u que pertence a S_1, mas não pertence a S_2 e demonstre isso.
   (a) $S_1 = [(1,-1,0),(0,1,1)]$ e $S_2 = [(1,1,2),(3,-1,2)]$.
   (b) $S_1 = [(1,2,1,-1),(-1,1,2,1),(3,3,0,-3)]$ e $S_2 = [(3,5,3,-3),(1,-2,0,5),(1,2,2,-1)]$.
   (c) $S_1 = [(1,0,1,0),(1,-1,2,1),(0,1,1,0)]$ e $[(-2,1,1,1),(1,1,2,1),(-2,0,1,-1)]$.
   (d) $S_1 = [(1,2,-1,1),(2,1,1,-2)]$ e $S_2 = [(1,-1,-1,0),(0,1,1,-1),(2,-5,-5,3)]$
   (e) $S_1 = [(1,2,-1,1),(2,1,1,-2)]$ e S_2 é o subespaço abaixo:
   $$S_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : -x+2z-t=0 \text{ e } y=z\}.$$
   (f) $S_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : -x+z=0 \text{ e } x+y+z-t=0\}$, e
   $$S_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : y+2z+t=0 \text{ e } 2x+y-t=0 \text{ e } y+t=0\}.$$
   (g) $S_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : -x+z=0 \text{ e } x+y+z-t=0\}$, e
   $$S_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : y+2z+t=0 \text{ e } 2x+y-t=0\}.$$

2. Sejam S_1 e S_2 subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$. Mostre que:
   (a) $S_1 \cap S_2$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.
   (b) $S_1 + S_2 = \{u_1 + u_2 : u_1 \in S_1 \text{ e } u_2 \in S_2\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

3. Em cada um dos itens do exercício 1, encontre uma base e determine a dimensão de S_1, S_2, $S_1 \cap S_2$ e $S_1 + S_2$. Nos casos em que os espaços S_1 ou S_2 sejam dados por seus geradores, determine uma base formada por um subconjunto dos geradores.

4. Complete as bases que você encontrou nos exercícios acima para bases do espaço $\mathbb{R}^n$ correspondentes (ou seja, complete as bases encontradas para uma base de $\mathbb{R}^3$ no caso dos subespaços de 1(a) e de $\mathbb{R}^4$ nos subespaços dos outros itens.

5. Sejam S, S_1, S_2 subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que S é a **soma direta** de S_1 e S_2 se $S = S_1 + S_2$ e $S_1 \cap S_2 = \{0\}$. Neste caso escrevemos $S = S_1 \oplus S_2$.

   Suponha que $S = S_1 \oplus S_2$ e sejam $B_1 = (u_1, \ldots, u_k)$ e $B_2 = (v_1, \ldots, v_l)$ bases de S_1 e S_2 respectivamente. Mostre que $B = (u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_l)$ é uma base de S. Conclua que se $S = S_1 \oplus S_2$ então
   $$\dim S = \dim S_1 + \dim S_2.$$

6. Decida se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa. Prove ou dê um contra-exemplo: Se $S = S_1 + S_2$ então $\dim S = \dim S_1 + \dim S_2$.

7. Prove que
$$\dim(S_1 + S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2).$$
[DICA: Use o teorema do completamento que diz o seguinte: Se $S \subset \mathbb{R}^n$ é um subespaço vetorial de dimensão q e $w_1, \dots, w_p$ são vetores linearmente independentes de S então existem $w_{p+1}, \dots, w_q \in S$ tais que $B = (w_1, \dots, w_p, w_{p+1}, \dots, w_q)$ é uma base de S.]

8. Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço vetorial e seja $S^\perp$ seu complemento ortogonal (veja a lista 1 para a definição). Mostre que $\mathbb{R}^n = S \oplus S^\perp$. Conclua que
$$\dim S^\perp = n - \dim S.$$

9. Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ uma matriz com m linhas e n colunas. Denote por $u_1, \dots u_m \in \mathbb{R}^n$ os vetores formados pelas linhas de A e por $v_1, \dots v_n \in \mathbb{R}^m$ os vetores formados pelas colunas de A. Seja $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a transformação linear determinada pela matriz A. Mostre que
   (a) $\mathrm{Im}(T_A) = [v_1, \dots, v_n]$.
   (b) $N(T_A)^\perp = [u_1, \dots u_m]$.
   (c) A quantidade de linhas linearmente independentes de A é igual a quantidade de colunas linearmente independentes de A.

   [DICA: Para demonstrar o item (c) utilize o teorema do núcleo e da imagem que diz o seguinte: Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma aplicação linear então $\dim(N(T)) + \dim(Im(T)) = n$.]

10. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ a aplicação linear
$$T(x, y, z) = (2x - y, x + z, x - y, y - z).$$
Escreva a matriz de T com respeito a cada uma das bases de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ que você encontrou no exercício 4.

11. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear
$$T(x, y, z, t) = (2x - y + z + t, x + z, y - t).$$
Escreva a matriz de T com respeito a cada uma das bases de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ que você encontrou no exercício 4.

12. Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço vetorial e seja $S^\perp$ seu complemento ortogonal. Seja $B = (u_1, \dots, u_p, v_1, \dots v_{n-p})$ uma base de $\mathbb{R}^n$ onde $(u_1, \dots, u_p)$ é uma base de S e $(v_1, \dots v_{n-p})$ é uma base de $S^\perp$. Descreva as matrizes das projeções ortogonais P_S e $P_{S^\perp}$ com respeito a base B.

13. Seja $u = (3, -1, 4, -1) \in \mathbb{R}^4$ (onde as coordenadas estão escritas com respeito a base canônica de $\mathbb{R}^4$. Escreva as coordenadas de u com respeito a todas as bases de $\mathbb{R}^4$ que você encontrou no exercício 4.