MAT134 - Introdução à Álgebra Linear – Lista 1

1. Decida se cada uma das funções abaixo é uma aplicação linear. Justifique sua resposta com uma demonstração. Para as funções que forem aplicações lineares, determine a matriz que representa a mesma.
   (a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (2x - y, x + y + z)$.
   (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (2x - y, -y + 1)$.
   (c) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z, w) = (\sqrt{2}x - y, \cos(\pi/7)x + y + z, -\ln(3)y)$.
   (d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $T(x, y) = (2x - y, x + y, -y, x)$.
   (e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $T(x, y) = (2x - y, x + y, -y, x^2)$.
   (f) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (2x - y, e^{x+y+z}, -y)$.
   (g) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (2x - y, \operatorname{sen}(x))$.
   (h) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $T(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ onde $m \leq n$ e

$$y_i = x_i + x_{i+1} + \cdots + x_n, \text{ para todo } i = 1, 2, \dots m.$$

2. O produto escalar (ou produto interno) de $\mathbb{R}^n$ é a função

$$< \cdot, \cdot >: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad < (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

   Seja $u \in \mathbb{R}^n$. Mostre que a função

$$T_u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad T_u(v) =< u, v >$$

   é uma aplicação linear. Se $u = (x_1, \dots, x_n)$, escreva a matriz da aplicação linear T_u.

3. Sejam $e_1, \dots, e_n$ os vetores que formam a base canônica de $\mathbb{R}^n$, ou seja

$$e_i = (x_1, \dots, x_n) \text{ com } x_i = 1 \text{ e } x_j = 0 \text{ para todo } j \neq i.$$

   Mostre que a função

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad T(u) = (< e_1, u >, < e_2, u >, \dots, < e_n, u >)$$

   é uma aplicação linear. Determine a sua matriz.

4. Mostre que existe uma única aplicação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(0, 1) = (2, -1, 1), \text{ e } T(0, 1) = (1, 1, 1).$$

   Escreva uma fórmula explícita para a função T (ou seja, se $T(x, y) = (a, b, c)$, determine a, b, e c em funcção de x, y). Escreva a matriz da aplicação linear T.

5. Para a aplicação linear T acima, mostre que a imagem de T é um plano π em $\mathbb{R}^3$. Escreva uma equação geral para o plano π.

   Observe que ao fazer isso você estará descrevendo o plano π como o núcleo de uma aplicação linear $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Determine a aplicação linear S e sua matriz.

6. Mostre que existe uma única aplicação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(-1, 2) = (1, 0, 3), \text{ e } T(0, -1) = (1, -1, 1).$$

   Escreva uma fórmula explícita para a função T (ou seja, se $T(x, y) = (a, b, c)$, determine a, b, e c em funcção de x, y). Escreva a matriz da aplicação linear T.

7. Para a aplicação linear T acima, mostre que a imagem de T é um plano π em $\mathbb{R}^3$. Escreva uma equação geral para o plano π.

   Observe que ao fazer isso você estará descrevendo o plano π como o núcleo de uma aplicação linear $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Determine a aplicação linear S e sua matriz.

8. Mostre que existe uma única aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(1, 0, 0) = (-1, 2),\ T(0, 1, 0) = (1, -1) \text{ e } T(0, 0, 1) = (0, 1).$$

   Escreva uma fórmula explícita para a função T (ou seja, se $T(x, y, z) = (a, b)$, determine a, b em funcção de x, y, z). Escreva a matriz da aplicação linear T.

9. Para a aplicação linear T acima, mostre que o núcleo de T é uma reta r passando pela origem em $\mathbb{R}^3$. Escreva uma equação vetorial para a reta r.

10. Mostre que existe uma única aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(-1, 2, 1) = (1, 3),\ T(0, 1, 1) = (1, 1) \text{ e } T(1, 1, -1) = (1, -1).$$

    Escreva uma fórmula explícita para a função T (ou seja, se $T(x, y, z) = (a, b)$, determine a, b em funcção de x, y, z). Escreva a matriz da aplicação linear T.

11. Para a aplicação linear T acima, mostre que o núcleo de T é uma reta r passando pela origem em $\mathbb{R}^3$. Escreva uma equação vetorial para a reta r.

    Observe que ao fazer isso você estará descrevendo a reta r como a imagem de uma aplicação linear $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Determine a aplicação linear S e sua matriz.

12. Determine se os seguintes subconjuntos são subespaços vetoriais. Justifique sua resposta com uma demonstração.
    (a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x + 2y + z = 0\}$.
    (b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x + z = 0\}$.
    (c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x + y + z = 0 \text{ e } x - 2z = 0\}$.
    (d) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \text{ é um número inteiro}\}$.

(e) $S = \{(2\lambda, 0, -\lambda) \in \mathbb{R}^3 : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

(f) $S = \{(\lambda + 3\mu, \mu, -\lambda + \mu, 2\lambda, \mu - \lambda) \in \mathbb{R}^5 : \mu, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

(g) $S = \{(\lambda^2, 0, -\lambda) \in \mathbb{R}^3 : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

(h) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -\text{sen}(x) + z = 0\}$.

(i) $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : -x + 2z - t = 0 \text{ e } x = y\}$.

13. Para cada um dos itens do exercício 12 acima onde S é um subespaço, determine um conjunto de geradores para S. Observe que fazer isso você estará descrevendo S como a imagem de uma aplicação linear. Escreva esta aplicação linear (especificando também seu domínio e seu contra-domínio).

14. Para cada um dos itens do exercício 12 acima onde S é um subespaço, determine uma aplicação linear T para a qual S é o núcleo de T. Observe que fazer isso você estará descrevendo S como o conjunto das soluções de um sistema de equações lineares homogêneo. Escreva este sistema.

15. Para cada um dos itens do exercício 12 acima onde S é um subespaço, determine uma base e a dimensão de S.

16. Dado um subespaço vetorial $S \subseteq \mathbb{R}^n$, definimos o seu complemento ortogonal como sendo

$$S^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n :< u, v >= 0 \text{ para todo } v \in S\}.$$

Mostre que $S^\perp$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

17. Para cada um dos itens do exercício 12 acima onde S é um subespaço, determine uma base e a dimensão de $S^\perp$.

18. Dado um subespaço vetorial $S \subseteq \mathbb{R}^n$ definimos a projeção ortogonal de $\mathbb{R}^n$ em S como sendo a função

$$P_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

definida pelas seguintes condições:

- P_S é linear;
- $P_S(u) \in S$ para todo $u \in \mathbb{R}^n$;
- $u - P_S(u) \in S^\perp$ para todo $u \in \mathbb{R}^n$.

Mostre que

(a) $P_S \circ P_S = P_S$.

(b) A imagem de P_S é S.

(c) O núcleo de P_S é $S^\perp$.

(d) $P_{S^\perp} = \mathrm{I}_{\mathbb{R}^n} - P_S$ onde $\mathrm{I}_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é a função identidade (ou seja $\mathrm{I}_{\mathbb{R}^n}(u) = u$) e $P_{S^\perp}$ denota a projeção ortogonal no subespaço $S^\perp$.

(e) $P_{S^\perp} \circ P_{S^\perp} = P_{S^\perp}$.

(f) A imagem de $P_{S^\perp}$ é $S^\perp$.

(g) O núcleo de $P_{S^\perp}$ é S.

(h) $(S^\perp)^\perp = S$.

19. Para cada um dos itens do exercício 12 acima onde S é um subespaço, escreva as matrizes das aplicações P_S e $P_{S^\perp}$. Determine uma fórmula geral para $P_S(u)$ e $P_{S^\perp}(u)$ para qualquer $u \in \mathbb{R}^n$ (onde n é o n do $\mathbb{R}^n$ correspondente de cada item).