Teste 2

1) Seja $a \in \mathbb{R}$. Considere $u \in \mathbb{R}^4$ e o subespaço vetorial $S \subset \mathbb{R}^4$ descritos em função de a abaixo.

$$u = (0, 1, 2-2a, 1) \quad , \quad S = [(1,1,1,2), (1,2,1-a,3), (a,2,2,2+a)]$$

a) Determine todos os valores de $a \in \mathbb{R}$ para os quais $u \in S$.

Resp.: Temos que $u \in S$ se e somente se existem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tq

$$(0, 1, 2-2a, 1) = \alpha(1,1,1,2) + \beta(1,2,1-a,3) + \gamma(a,2,2,2+a); \circledast$$

ou seja, se e somente se u é combinação linear dos vetores que geram S.

A equação $\circledast$ nos dá o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + a\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + 2\gamma = 1 \\ \alpha + (1-a)\beta + 2\gamma = 2-2a \\ 2\alpha + 3\beta + (2+a)\gamma = 1 \end{cases}$$

, cuja matriz associada é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1-a & 2 & 2-2a \\ 2 & 3 & 2+a & 1 \end{array}\right]$$

Escalonando a matriz, temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1-a & 2 & 2-2a \\ 2 & 3 & 2+a & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \\ L_4 \to L_4 - 2L_1 \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 2-a & 1 \\ 0 & -a & 2-a & 2-2a \\ 0 & 1 & 2-a & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_3 \to L_3 + aL_2 \\ L_4 \to L_4 - L_2 \end{array} \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 2-a & 1 \\ 0 & 0 & 2+a-a^2 & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Note que $2+a-a^2=-(a+1)(a-2)$, logo $2+a-a^2=0$ se e somente se $a=-1$ ou $a=2$. Temos três casos a considerar.

i) Se $\underline{a=-1}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Pela linha 3 temos a equação $0.\alpha+0.\beta+0.\gamma=3$, que não possui solução, logo o sistema será <u>impossível</u>, logo $u \notin S$.

ii) Se $\underline{a=2}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Desta forma as soluções são dadas por $\alpha = 1-2\gamma$ e $\beta = 1$, com $\gamma \in \mathbb{R}$. Logo o sistema é <u>possível</u> <u>indeterminado</u> e portanto $u \in S$.

iii) Se $\underline{a \neq -1}$ e $\underline{a \neq 2}$, Podemos dividir por $-(a+1)(a-2)$, logo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 2-a & 1 \\ 0 & 0 & 2+a-a^2 & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3/(a+1)(a-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 2-a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \to L_2-(2-a)L_3]{L_1 \to L_1 - aL_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -\frac{a}{a+1} \\ 0 & 1 & 0 & 1-\frac{2-a}{a+1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1-3a}{a+1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2a-1}{a+1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Portanto o sistema possui uma única solução, $\alpha = \dfrac{1-3a}{a+1}$, $\beta = \dfrac{2a-1}{a+1}$ e $\gamma = \dfrac{1}{a+1}$, ou seja, o sistema é possível determinado, e portanto $u \in S$.

Concluindo, segue que $u \in S$ para todo $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

---

b) Determine a dimensão de S em função de a.

Vamos encontrar uma base p/ S. Como

$$S = [(1,1,1,2), (1,2,1-a,3), (a,2,2,2+a)],$$

precisamos encontrar um subconjunto L.I. destes vetores. A equação

$$\alpha(1,1,1,2) + \beta(1,2,1-a,3) + \gamma(a,2,2,2+a) = (0,0,0,0)$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta + a\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + (1-a)\beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + (2+a)\gamma = 0 \end{cases}$$

, cuja matriz aumentada associada é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1-a & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2+a & 0 \end{array}\right]$$

Observe que este sistema é o sistema homogêneo associado ao sistema do item (a), e as matrizes reduzidas são as mesmas. Desta forma, o escalonamento é o mesmo, e obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1-a & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2+a & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 2-a & 0 \\ 0 & 0 & 2+a-a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Assim como no item (a), temos três casos:

i) Se $\underline{a=-1}$, a matriz será equivalente a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Logo $\alpha = 4\gamma$ e $\beta = -3\gamma$, com $\gamma \in \mathbb{R}$. Como γ é variável livre, seu vetor associado $(a, 2, 2, 2+a) = (-1, 2, 2, 1)$ é combinação linear dos demais, $(1, 1, 1, 2)$ e $(1, 2, 2, 3)$, sendo estes L.I. Portanto $((1, 1, 1, 2), (1, 2, 2, 3))$ é base p/ S, logo $\dim S = 2$.

De maneira mais rápida, a matriz escalonada possui 2 pivos, logo 2 vetores L.I no conjunto de geradores, portanto $\dim S = 2$.

ii) Se $\underline{a=2}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\alpha = -2\gamma$, $\beta = 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$
Um parâmetro livre

A matriz escalonada possui 2 pivos, e portanto $\dim S = 2$.

iii) Se $\underline{a \neq -1}$ e $\underline{a \neq 2}$. Pelo que fizemos no item (a), temos a matriz escalonada é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(solução trivial)

, possuindo 3 pivos. Desta forma os três vetores geradores formam conjunto L.I., logo formam base e portanto $\dim S = 3$.

Concluindo, $\dim S = 2$ se $a \in \{-1, 2\}$ e $\dim S = 3$ se $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$