Vimos que:

Se $S \subset \mathbb{R}^n$ é subespaço vetorial e $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_d)$ é base de $S \Rightarrow$ cada $u \in S$ pode ser escrito da forma

$$u = a_1 f_1 + \dots + a_d f_d \qquad \underline{\text{de maneira única}}$$

$$u = (a_1, \dots, a_d)_{\mathcal{F}}$$

- Seja $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ base de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_m)$ base de $\mathbb{R}^m$ e $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear

<u>Matriz de T nas bases $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$</u>:

$$[T]_{\mathcal{G}\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ (T(f_1))_{\mathcal{G}} & (T(f_2))_{\mathcal{G}} & \cdots & (T(f_n))_{\mathcal{G}} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Onde $(T(f_i))_{\mathcal{G}}$ são as coordenadas de $T(f_i)$ na base $\mathcal{G}$

<u>Exemplo</u>: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y) = (x-y, x+2y, 2x-y)$

$\mathcal{F} = (f_1, f_2)$ $\qquad f_1 = (1,-1)$, $f_2 = (2,1)$

$\mathcal{G} = (g_1, g_2, g_3)$ $\qquad g_1 = (1,1,2)$, $g_2 = (-1,2,-1)$, $g_3 = (1,0,0)$

$T(f_1) = (2,-1,3)$ (Na base canônica!)

$(2,-1,3) = a g_1 + b g_2 + c g_3 \Rightarrow (2,-1,3) = (a-b+c, a+2b, 2a-b)$

$$\begin{cases} a-b+c = 2 \\ a+2b = -1 \\ 2a-b = 3 \end{cases}$$

$b = 2a-3 \Rightarrow a + 2(2a-3) = -1 \Rightarrow 5a - 6 = -1$
$\Rightarrow 5a = 5 \Rightarrow a = 1$
$\Rightarrow b = -1 \Rightarrow c = 0$

$T(f_1) = (1,-1,0)_{\mathcal{G}}$

$T(f_2) = (1,4,3)$ Na base canônica

$(1,4,3) = a g_1 + b g_2 + c g_3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 1 \\ a + 2b = 4 \\ 2a - b = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow b = 2a - 3 \Rightarrow a + 2(2a-3) = 4$

$\Rightarrow 5a - 6 = 4$

$\Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow c = 0$

$T(f_2) = (2, 1, 0)_{\mathcal{G}}$

$$\Rightarrow [T]_{\mathcal{G}\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{T((x,y)_{\mathcal{F}}) = (x+2y, -x+y, 0)_{\mathcal{G}}}$$

- $$[T]_{\mathcal{G}\mathcal{F}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} | \\ T(u) \\ | \end{pmatrix}_{\mathcal{G}}$$

$u = (x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{F}}$

Ideia: Dada uma transformação linear $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ podem existir bases $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ t.q. fica mais fácil entender o comportamento de T.

<u>Exemplo</u>: Suponha que $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear e

$\mathcal{F}$ base de $\mathbb{R}^n$ t.q. $(\underbrace{f_1, \ldots, f_d}_{\text{base de } N(T)}, f_{d+1}, \ldots, f_n) \Rightarrow [T]_{\mathcal{G}\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} | & | & & | & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{*} \\ | & | & & | & \end{pmatrix}$

Exemplo:

Seja $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear e $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_m)$ uma base tal que $(g_1, \dots, g_p)$ é base de $\mathrm{Im}(T)$

$$\Rightarrow \quad [T]_{\mathcal{G}\mathcal{F}} = \left(\begin{array}{c} * \\ \hline 0 \end{array} \right)$$

Exemplo Numerico:

$$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad T(x,y,z) = (x+y,\ x-z,\ y+z)$$

$$N(T) = \left\{ (x,y,z) \;\middle|\; \begin{cases} x+y=0 \\ x-z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \right\} = [(-1,1,-1)]$$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x-z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \quad x=-y\ ,\ z=-y \qquad \mathcal{F} = \big(\underset{f_1}{(-1,1,-1)}, \underset{f_2}{(1,0,0)}, \underset{f_3}{(0,1,0)}\big)$$

$$\mathrm{Im}(T) = [\overset{u}{(1,1,0)}, \overset{v}{(1,0,1)}, \overset{w}{(0,-1,1)}] = [(1,1,0),(1,0,1)]$$

$$w = v - u$$

$$\mathcal{G} = \big(\underset{g_1}{(1,1,0)}, \underset{g_2}{(1,0,1)}, \underset{g_3}{(0,1,0)}\big)$$

$$T(f_1) = (0,0,0)_{\mathcal{G}}$$

$$T(f_2) = (1,1,0) = g_1 = (1,0,0)_{\mathcal{G}} \quad \Rightarrow \quad [T]_{\mathcal{G}\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(f_3) = (1,0,1) = g_2 = (0,1,0)_{\mathcal{G}}$$

Pergunta: Sempre é possível encontrar bases "adaptadas" como acima?

Def: Sejam $f_1, \dots, f_d \in S$. Dizemos que $\{f_1, \dots, f_d\}$ é um subconjunto <u>L.I. maximal</u> se (i) L.I.

(ii) $f_1, \dots, f_d, v$ L.D. $\forall v \in S$

Teorema: Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço. $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_d)$ é base de $S \iff \{f_1, \dots, f_d\}$ é um subconjunto L.I. maximal

Dem: ($\Rightarrow$) Suponha $\mathcal{F}$ base

$\Rightarrow f_1, \dots, f_d$ L.I. Precisamos mostrar que é maximal

Seja $v \in S \Rightarrow v = a_1 f_1 + \dots + a_d f_d$

$\Rightarrow f_1, \dots, f_d, v$ é L.D. $\left(\underbrace{a_1 f_1 + \dots + a_d f_d - v}_{\text{comb. Linear não trivial}} = 0 \right)$

$\Rightarrow \{f_1, \dots, f_d\}$ L.I. maximal

($\Leftarrow$) Suponha $\{f_1, \dots, f_d\}$ L.I. maximal

$\Rightarrow f_1, \dots, f_d$ L.I. e precisamos mostrar que $S = [f_1, \dots, f_d]$

- $f_1, \dots, f_d \in S \Rightarrow [f_1, \dots, f_d] \subset S$
- Vamos mostrar que $S \subset [f_1, \dots, f_d]$:

Seja $v \in S \Rightarrow f_1, \dots, f_d, v$ L.D.

$\Rightarrow \exists a_1, \dots, a_d, b \in \mathbb{R}$ t.q. $a_1 f_1 + \dots + a_d f_d + bv = 0$

com $a_i \neq 0$ p/ algum i ou $b \neq 0$

__Afirmação__: $b \neq 0$ (pois se $b = 0 \Rightarrow a_1 f_1 + \dots + a_d f_d = 0 \Rightarrow a_1 = \dots = a_d = 0$)

$\Rightarrow v = -\frac{a_1}{b} f_1 - \dots - \frac{a_d}{b} f_d \in [f_1, \dots, f_d]$ ■

Teorema (Completamento):
Sejam $v_1, \dots, v_\ell$ L.I., $v_1, \dots, v_\ell \in S$. Então existe uma base $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_d)$ de S com $f_1 = v_1, \dots, f_\ell = v_\ell$.

Dem:

- Se $(v_1, \dots, v_\ell)$ é base de S acabou.
- Se $(v_1, \dots, v_\ell)$ Não é base $\Rightarrow$ Não é L.I. maximal

$\Rightarrow \exists\, f_{\ell+1} \in S$ t.q. $v_1, \dots, v_\ell, f_{\ell+1}$ L.I.

- Se $(v_1, \dots, v_\ell, f_{\ell+1})$ é base de S acabou
- Se $(v_1, \dots, v_\ell, f_{\ell+1})$ Não é base $\Rightarrow$ Não é L.I. maximal

$\Rightarrow \exists\, f_{\ell+2} \in S$ t.q. $v_1, \dots, v_\ell, f_{\ell+1}, f_{\ell+2}$ é L.I.

Se for maximal acabou. Se não for continua até ficar maximal.

$\blacksquare$

Exemplo:

Sejam $v_1 = (1,0,-1,1)$, $v_2 = (1,1,-1,0)$

Completar p/ base de $\mathbb{R}^4$

Vamos escolher algum $v_3 \in \mathbb{R}^4$ t.q. $v_3 \notin [v_1, v_2]$

$[v_1, v_2] = \{(a+b, b, -a-b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

se $v_3 = (x,y,z,w) \in [v_1, v_2] \Rightarrow z = -x$

Logo $v_3 = (1,0,0,0) \notin [v_1, v_2] \Rightarrow v_1, v_2, v_3$ L.I.

Vamos escolher $v_4 \notin [v_1, v_2, v_3]$:

$[v_1, v_2, v_3] = \{(a+b+c, b, -a-b, a) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$

se $(x,y,z,w) \in [v_1, v_2, v_3] \Rightarrow -w-y = z$

$\Rightarrow v_4 = (0,0,1,0) \notin [v_1, v_2, v_3] \Rightarrow B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ é base de $\mathbb{R}^4$ $\blacksquare$