Vimos que:

- Um <u>base</u> de $S \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto ordenado $B = (f_1, \dots, f_d)$ tal que

  1) $S = [f_1, \dots, f_d]$
  2) $f_1, \dots, f_d$ são L.I.

- A <u>dimensão de S</u> é a quantidade de vetores em uma base de S: Se $B = (f_1, \dots, f_d)$ é uma base de $S \Rightarrow \dim S = d$

<u>Exemplo</u>: $S = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ base canônica

$$e_i = (0, \dots, 1, 0 \dots 0)$$

<u>Coordenadas com respeito a uma base</u>

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço e $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_d)$ uma base de S.

Qualquer $u \in S$ pode ser escrito de <u>maneira única</u> como
$$u = a_1 f_1 + \dots + a_d f_d \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

De fato, suponha que $u = a_1 f_1 + \dots + a_d f_d$ e $u = b_1 f_1 + \dots + b_d f_d$

$\Rightarrow a_1 f_1 + \dots + a_d f_d = b_1 f_1 + \dots + b_d f_d$

$\Rightarrow (a_1 - b_1) f_1 + \dots + (a_d - b_d) f_d = 0 \Longrightarrow a_1 = b_1, \dots, a_d = b_d$

Dizemos que $a_1, \dots, a_d$ são as <u>coordenadas de u na base $\mathcal{F}$</u> e escrevemos

$$\boxed{u = (a_1, \dots, a_d)_{\mathcal{F}}}$$

<u>Exemplo</u> Quando escrevemos $u \in \mathbb{R}^n$ como $u = (x_1, \dots, x_n)$,

$x_1, \dots, x_n$ são as coord. de u na base canônica de $\mathbb{R}^n$

__Exemplo:__ Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ o subespaço

$$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0 \}$$

1) Encontre uma base de S
2) Mostre que $u = (1,3,1) \in S$ e escreva as coordenadas de u na base de S do item (1):

1) $S = \{ (y-2z, y, z) \mid y,z \in \mathbb{R} \} = \{ y(1,1,0) + z(-2,0,1) \mid y,z \in \mathbb{R} \}$

$\mathcal{F} = ((1,1,0), (-2,0,1))$ é uma base de S pois

(a) $S = [f_1, f_2]$

- $[f_1, f_2] \subset S$ pois $f_1 \in S$, $f_2 \in S$

- $S \subset [f_1, f_2]$ pois se $u = (x,y,z) \in S \Rightarrow x = y - 2z$

$$\Rightarrow u = (y-2z, y, z) = y f_1 + z f_2 \in [f_1, f_2]$$

(b) f_1, f_2 são L.I.:

Se $a f_1 + b f_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a - 2b = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = 0$

2) $u = (1,-3,1) \in S$ pois $1 - 3 + 2 \cdot 1 = 0$

$$(1,-3,1) = a f_1 + b f_2 = (a - 2b, a, b)$$

$\Rightarrow a = -3$, $b = 1$

$$\Rightarrow \boxed{u = (-3, 1)_{\mathcal{F}}}$$

__Note que:__ $B = (f_1, f_2, f_3)$ é base de $\mathbb{R}^3$

onde $f_3 = (1,0,0)$ (Exercício!)

Nessa Base: $S = \{ (a,b,c)_B \in \mathbb{R}^3 \mid c = 0 \}$

<u>Exemplo</u>: Seja $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ uma base de $S \subset \mathbb{R}^n$

e sejam $v_1 = (2, 1, -1)_{\mathcal{F}}$, $v_2 = (1, 0, -1)_{\mathcal{F}}$, $v_3 = (3, -1, 0)_{\mathcal{F}}$

1) Mostre que $B = (v_1, v_2, v_3)$ é base de S

2) Escreva as coordenadas de $u = (-1, 1, 1)_{\mathcal{F}}$ na base B

1) (a) $S = [v_1, v_2, v_3]$:

Sabemos que $S = [f_1, f_2, f_3]$

- $[v_1, v_2, v_3] \subset S$ pois $v_i \in [f_1, f_2, f_3]$

- $S \subset [v_1, v_2, v_3]$:

$f_1 \in [v_1, v_2, v_3]$? $\quad f_1 = av_1 + bv_2 + cv_3$

$$f_1 = av_1 + bv_2 + cv_3 = a(2f_1 + f_2 - f_3) + b(f_1 - f_3) + c(3f_1 - f_2)$$

$$= (2a + b + 3c)f_1 + (a - c)f_2 + (-a - b)f_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + b + 3c = 1 \\ a - c = 0 \\ -a - b = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a &= c \\ b &= -a = -c \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2c - c + 3c = 1 \Rightarrow 4c = 1 \Rightarrow c = 1/4 \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} a &= 1/4 \\ b &= -1/4 \\ c &= 1/4 \end{aligned}}$$

$f_2 \in [v_1, v_2, v_3] \Leftrightarrow f_2 = av_1 + bv_2 + cv_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + 3c = 0 \\ a - c = 1 \\ -a - b = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a &= -b \\ c &= -b - 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow -2b + b - 3(b+1) = 0$

$\Rightarrow -4b - 3 = 0$

$\Rightarrow b = -3/4$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} a &= 3/4 \\ b &= -3/4 \\ c &= -1/4 \end{aligned}}$$

$f_3 \in [v_1, v_2, v_3] \iff \exists\, a, b, c \in \mathbb{R}$ t.q.

$$f_3 = av_1 + bv_2 + cv_3 \iff \begin{cases} 2a+b+3c = 0 \\ a - c = 0 \\ -a-b = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow a = -1-b = c \quad \Rightarrow \quad -2-2b+b-3-3b = 0$

$\Rightarrow -4b = 5 \Rightarrow b = -5/4$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{4}, \quad b = -\frac{5}{4}, \quad c = 1/4}$$

Logo $S \subset [v_1, v_2, v_3]$

(b) v_1, v_2, V_3 L.I. :

Suponha que $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+b+3c = 0 \\ a - c = 0 \\ -a-b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -b = c$$

$\Rightarrow -2b+b-3b = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a = c = 0$ ∎

2)

Note que em (1) a), obtemos:

$$f_1 = \left(\frac{1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{4}\right)_B, \quad f_2 = \left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{-1}{4}\right), \quad f_3 = \left(\frac{1}{4}, \frac{-5}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

Logo, $u = (-1,1,1)_F = -f_1 + f_2 + f_3 = \left(\frac{3}{4}, \frac{-7}{4}, \frac{-1}{4}\right)_B$ ∎

Matriz de $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ com respeito à base F e G

$F = (f_1, \dots, f_n)$ base de $\mathbb{R}^n$, $\quad G = (g_1, \dots, g_m)$ base de $\mathbb{R}^m$

$$T(f_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij}\, g_i \qquad [T]_{FG} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ T(f_1) & \cdots & T(f_n) \\ | & & | \end{pmatrix}$$

<u>Exemplo</u>: Seja $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$T(x,y,z) = (x+z,\ y-z)$$

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ (Na base canônica)

Seja $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ $\quad f_1 = (-1,1,1)$, $f_2 = (0,1,0)$, $f_2 (0,0,1)$

$\mathcal{G} = (g_1, g_2)$ $\quad g_1 = (0,1)$, $g_2 = (1,-1)$

$\Rightarrow [T]_{\mathcal{F}\mathcal{G}} = \ ?$

$$T(f_1) = (0,0)_{\varepsilon} = (0,0)_{\mathcal{G}}$$
$$T(f_2) = (0,1)_{\varepsilon} = (1,0)_{\mathcal{G}}$$
$$T(f_2) = (1,-1)_{\varepsilon} = (0,1)_{\mathcal{G}}$$

$$\Rightarrow \boxed{[T]_{\mathcal{F}\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$