Lembre que:

$v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ são:

L.I. se a equação

$$(*) \quad x_1 v_1 + \dots + x_k v_k = 0$$

Admite somente a solução trivial $x_1 = \dots = x_k = 0$

L.D. se não é L.I., ou seja, se existe $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ com algum $x_i \neq 0$ tais que

$$x_1 v_1 + \dots + x_k v_k = 0$$

Exemplos:

- $k=1$ $\quad v$ é L.D. $\iff v = 0$

  $\quad v$ é L.I. $\iff v \neq 0$

$v = (a_1, a_2, \dots, a_n) \qquad xv = (xa_1, xa_2, \dots, xa_n)$

$$xv = 0 \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad \underbrace{a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0}_{v=0}$$

- $k=2$ $\quad u, v$ são L.D. $\quad u = \alpha v$ ou $v = \alpha u$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$

Dem: Seja $x, y \in \mathbb{R}$ tais que

$xu + yv = 0 \qquad$ suponha $x \neq 0 \Rightarrow u = -\frac{y}{x} v$

$\qquad\qquad\qquad\quad$ suponha $y \neq 0 \Rightarrow v = \frac{-x}{y} u$

Prop: Suponha que $v_1, \dots, v_k$ são L.I. Então

$v_1, \dots, v_k, w$ são L.D. $\iff$ $w \in [v_1, \dots, v_k]$

Dem: $(\Rightarrow)$

Se $v_1, \dots, v_k, w$ L.D.

$\Rightarrow \exists\, x_1, \dots, x_k, y \in \mathbb{R}$ tais que algum $x_i \neq 0$ ou $y \neq 0$

para os quais

$$x_1 v_1 + \cdots + x_k v_k + y w = 0$$

Vamos mostrar que necessariamente $y \neq 0$:

Assuma que $y = 0$

$\Rightarrow \quad x_1 v_1 + \cdots + x_k v_k + 0 \cdot w = x_1 v_1 + \cdots + x_k v_k = 0$

$\Rightarrow \quad x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0 \quad \Rightarrow \quad x_i = 0 \ \forall i$ e $y = 0$ Absurdo

$\Rightarrow y \neq 0$

Logo,

$$w = -\frac{x_1}{y} v_1 - \frac{x_2}{y} v_2 - \cdots - \frac{x_k}{y} v_k \in [v_1, \dots, v_k]$$

$(\Leftarrow)$ Se $w \in [v_1, \dots, v_k] \Rightarrow w = x_1 v_1 + \cdots + x_k v_k \Rightarrow$

$x_1 v_1 + \cdots + x_k v_k - w = 0 \quad \Rightarrow$ L.D. $\quad (y = -1 \neq 0)$ ∎

OBS: $v_1, \dots, v_k$ L.D. $\iff$ algum $v_i \in [v_1, \dots, \hat{v_i}, \dots, v_k]$

mas não necessariamente $v_k \in [v_1, \dots, v_{k-1}]$

Dem: $(\Rightarrow)$ $x_1 v_1 + \cdots + x_k v_k = 0$, $x_i \neq 0 \Rightarrow v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} -\frac{x_j}{x_i} v_j$

$(\Leftarrow)$ $\sum_{j \neq i} x_j v_j - v_i = 0$

OBS: Segue que se $S = [v_1, \dots, v_k]$ e $v_1, \dots, v_k$ L.D

$\Rightarrow$ S pode ser gerado por menos que k vetores:

$$S = [\underbrace{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k}_{k-1 \text{ vetores}}]$$

Se $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k$ são L.D. podemos repetir o argumento e retirar mais um vetor....

Def: • Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço vetorial. Uma base de S é um conjunto ordenado $B = (v_1, \dots, v_k)$ onde

(i) $S = [v_1, \dots, v_k]$

(ii) $v_1, \dots, v_k$ são L.I.

• A dimensão de S ($\dim S$) é o número de elementos de uma base de S.

Exemplo: $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$$T(x, y, z) = (x+z, -x+y+z, y+2z, x+z)$$

Encontrar Base e dimensão de $Im(T)$ e $N(T)$

$$Im(T) = [(1,-1,0,1), (0,1,1,0), (1,1,2,1)]$$

Vamos ver se são L.I.

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0 \iff \begin{cases} x+z = 0 \\ -x+y+z = 0 \\ y+2z = 0 \\ x+z = 0 \end{cases} \iff x = -z, \; y = -2z$$

$\Rightarrow$ L.D.

$v_3 = v_1 + 2v_2$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(T) = [v_1, v_2]$ vejamos se v_1, v_2 é L.I.

$x v_1 + y v_2 = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ -x + y = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \iff x = y = 0$ L.I.

$\Rightarrow B = (v_1, v_2)$ é base de $\operatorname{Im}(T)$

$\dim \operatorname{Im}(T) = 2$

$N(T) = \left\{ (x,y,z) \;\middle|\; \begin{cases} x + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \right\}$

Logo $(x,y,z) \in N(T) \iff x = -z \;,\; y = -2z$

$\Rightarrow N(T) = \{ (-z, -2z, z) \mid z \in \mathbb{R} \} = [\underbrace{(-1,-2,1)}_{\neq 0 \text{ L.I.}}]$

$\Rightarrow \dim N(T) = 1$

Se sobrar tempo.... coordenadas