Lembre que:

Def: $S \subset \mathbb{R}^n$ é um subespaço vetorial se

(i) $0 \in S$
(ii) $u, v \in S \Rightarrow u+v \in S$
(iii) $u \in S$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda u \in S$

Dados $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$, o subespaço gerado por $v_1, \dots, v_k$ é

$$[v_1, \dots, v_k] = \{x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

Conjunto das combinações lineares de $v_1, \dots, v_k$

- Dado um subespaço $S \subset \mathbb{R}^n$ dizemos que $v_1, \dots, v_k$ geram S se $S = [v_1, \dots, v_k]$

Exemplo:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$$

Vamos encontrar geradores para S

$x = 2y + z$

Logo, $u \in S \iff u = (2y+z, y, z)$, $y, z \in \mathbb{R}$

AFIRMAÇÃO:

$$S = \{y(2,1,0) + z(1,0,1) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = [v_1, v_2]$$

$v_1 = (2,1,0)$ e $v_2 = (1,0,1)$ são geradores de S.

Dem:

$S \subset [v_1, v_2]$: se $u = (a,b,c) \in S \Rightarrow a - 2b + c = 0 \Rightarrow a = 2b - c$

$\Rightarrow u = (2b - c, b, c) = b v_1 + c v_2$

$[v_1, v_2] \subset S$: $u \in [v_1, v_2]$

$\Rightarrow u = (2a+b, a, b) \Rightarrow u \in S$ $\blacksquare$

Exemplo:

$$S = \left\{ (x,y,z,w) \;\middle|\; \begin{cases} x-y+z+w=0 \\ x-y+z-w=0 \end{cases} \right\}$$

$x = y - z - w$

$\Rightarrow \quad (\cancel{y}-\cancel{z}-w) - \cancel{y}+\cancel{z}-w = 0 \quad \Rightarrow \quad w=0$

$\Rightarrow \quad \begin{matrix} x = y - z \\ w = 0 \end{matrix}$

Logo $\quad u=(x,y,z,w) \in S \Leftrightarrow u = (y-z, y, z, 0)$

Geradores: $\quad v_1 = (1,1,0,0) \;,\; v_2 = (-1,0,1,0)$

OBS: $\quad S = [(0,1,1,0), (1,1,0,0), (-1,0,1,0)]$ Exercício!

BASTA MOSTRAR $S \subset [v_1,\dots,v_k]$ & $v_i \in S \; \forall s$ para que $S = [v_1,\dots,v_k]$

Teorem: $[v_1,\dots,v_k]$ é o menor subespaço que contém $v_1,\dots,v_k$

Dem: ⊛

Pergunta: Qual o número mínimo de vetores que precisamos para gerar S?

Vamos mostrar que:

Se $[v_1,\dots,v_k] = S$ e $v_1,\dots,v_k$ são L.I.

$\Rightarrow$ Qualquer conjunto $w_1,\dots,w_l$ de S terá $l \geq k$

Def: $v_1, \dots, v_k$ são <u>Linearmente Independentes</u> se a única solução da equação

$$(*) \quad x_1 v_1 + \cdots + x_k v_k = 0$$

For a solução trivial $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$

- <u>Linearmente Dependentes</u> se não forem L.I., ou seja, se existir $x_1, \dots, x_k$ com algum $x_i \neq 0$ tal que $x_1 v_1 + \cdots + x_k v_k = 0$

<u>Exemplos</u>:

$v_1 = (1,-1,0)$, $v_2 = (2,1,1)$ são L.I:

$$x v_1 + y v_2 = (x+2y, -x+y, y)$$

$$x v_1 + y v_2 = 0 \iff \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -x + y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff y = 0, \ x = 0$$

<u>Exemplo</u>:

$v_1 = (1,0,-1,1)$, $v_2 = (0,1,1,0)$, $v_3 = (2,1,-1,2)$

são L.D. :

$$x v_1 + y v_2 + z v_3 = 0 \iff \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

Solução Não trivial de (*)

$\iff x = -2z, \ y = -z$ por exemplo $x = -2$, $y = -1$, $z = 1$ $\Rightarrow$ $\boxed{-2v_1 - v_2 + v_3 = 0}$

Def: Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço. Uma <u>base</u> de S é um conjunto <u>ordenado</u> $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_\ell)$ tal que

$$\begin{cases} v_1, \dots, v_\ell \quad \text{L.I.} \\ [v_1, \dots, v_\ell] = S \end{cases}$$

A <u>Dimensão</u> de S é o número de elementos numa base de S.

<u>OBS:</u> Precisamos mostrar que $\dim S$ está bem definido (próxima aula)

<u>Obs:</u> $\dim S = 0 \overset{\text{def}}{\iff} S = \{0\}$

<u>Exemplos:</u> $\mathbb{R}^n$, $\pi \subset \mathbb{R}^3$, $\pi \subset \mathbb{R}^4$, $r \subset \mathbb{R}^3$

(*) <u>Dem:</u>

Suponha que $v_1, \dots, v_k \in S$

$\Rightarrow x_1 v_1 + \dots + x_k v_k \in S \quad \forall x_1, \dots, x_k$

$\Rightarrow [v_1, \dots, v_k] \subset S$ ∎

<u>Corolário:</u>

$$[v_1, \dots, v_k] \subset [w_1, \dots, w_\ell] \iff v_1, \dots, v_k \in [w_1, \dots, w_\ell] \quad \forall i = 1, \dots, k$$