Vimos que

Def: $S \subset \mathbb{R}^n$ é um subespaço vetorial se

(i) $0 \in S$
(ii) $u, v \in S \Rightarrow u + v \in S$
(iii) $u \in S,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda u \in S$

- Se $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é linear $\Rightarrow$ $N(T) \subset \mathbb{R}^n$ & $Im(T) \subset \mathbb{R}^m$ são subespaços

Exemplos:

$$S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (*)\}$$

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Sistema de equações linear com m equações e n incógnitas (homogêneo)

$$S = \ker T_A, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(Cuidado: T Não é único!)

Caso Particular:

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}\right\} = \left\{(x, y, z) \;\middle|\; \begin{matrix} 2x - y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{matrix}\right\}$$

$$S = \ker T_A, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \longmapsto (x - 2y + z,\ x + y)$$

Exemplo:

$$S = \{(x-2y, x+y, x) \mid x,y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$= \{x(1,1,1) + y(-2,1,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$$

$S = \mathrm{Im}\, T$ onde $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x,y) \longmapsto (x-2y, x+y, x)$$

Construção Geral:

Seja $v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{R}^m$

$S = \{x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_\ell v_\ell \mid x_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$ é um subespaço vetorial

Dem: (i) $0 \in S$ tome $x_1 = x_2 = \dots = x_\ell$

(ii) $(a_1 v_1 + \dots + a_\ell v_\ell) + (b_1 v_1 + \dots + b_\ell v_\ell) = (a_1 + b_1) v_1 + \dots + (a_\ell + b_\ell) v_\ell$

(iii) $\lambda (a_1 v_1 + \dots + a_\ell v_\ell) = (\lambda a_1) v_1 + \dots + (\lambda a_\ell) v_\ell$

$\blacksquare$

OBS: Note que $S = \mathrm{Im}(T_A)$ onde

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_\ell \\ | & | & & | \end{pmatrix} \qquad T_A: \mathbb{R}^\ell \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

De fato: $T_A(x_1, \dots, x_\ell) = x_1 T_A(e_1) + \dots + x_\ell T_A(e_\ell) =$

$$= x_1 v_1 + \dots + x_\ell v_\ell$$

$\blacksquare$

Nomeclatura / Definição:

- $x_1v_1+\dots+x_\ell v_\ell$, $x_i \in \mathbb{R}$ é uma combinação linear de $v_1,\dots,v_\ell$

- $S=\{x_1v_1+\dots+x_\ell v_\ell \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ é o subespaço gerado por $v_1,\dots,v_\ell$

$= [v_1,\dots,v_\ell]$

Cuidado! $[v_1,\dots,v_\ell]$ pode ser igual à $[w_1,\dots,w_k]$

NÃO é único!

Exemplo: $v_1=(-1,1,0)$, $v_2=(1,0,1)$, $v_3=(-1,2,1)$

$w_1=(0,1,1)$, $w_2=(2,-1,1)$

Então $[v_1,v_2,v_3]=[w_1,w_2]$

Vamos provar isso:

① $[v_1,v_2,v_3]\subset[w_1,w_2]$

Seja $u=av_1+bv_2+cv_3=(-a+b-c,\ a+2c,\ b+c)$

Queremos mostrar que $u\in[w_1,w_2]$ ou seja, que existem $x,y\in\mathbb{R}$ tais que $u=xw_1+yw_2=(2y,x-y,x+y)$

Temos que resolver o sistema:
$$\begin{cases} 2y=-a+b-c \\ x-y=a+2c \\ x+y=b+c \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = -a+b-c \\ x - y = a+2c \\ x + y = b+c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{-a+b+c}{2}, \quad x = \frac{a+b+3c}{2}$$

Agora vamos mostrar que

$$[w_1, w_2] \subset [v_1, v_2, v_3]$$

Seja $u \in [w_1, w_2] = x w_1 + y w_2 = (2y, x-y, x+y)$

Queremos mostrar que existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ t.q.

$$u = a v_1 + b v_2 + c v_3 = (-a+b-c, a+2c, b+c)$$

Temos que resolver

$$\begin{cases} -a+b-c = 2y \\ a + 2c = x-y \\ b+c = x+y \end{cases} \qquad (\text{incógnitas: } a, b, c)$$

$(1)+(2) \Rightarrow b+c = x+y \Leftrightarrow (3)$ $\qquad$ (3) é supérfluo

$$\boxed{a = x-y, \quad b = x+y, \quad c = 0 \quad \text{é uma solução}} \; !$$

<u>Problema</u>: • Como mostrar de maneira mais eficiente que $[v_1, \dots, v_\ell] \subset [w_1, \dots, w_k]$?

• Qual o número mínimo de geradores de um subespaço?

Teorema: $[v_1, \ldots, v_\ell] \subseteq [w_1, \ldots, w_k]$

$\iff v_i \in [w_1, \ldots, w_k] \quad \forall i = 1, \ldots, \ell$

Dem $(\Rightarrow)$ Suponha $[v_1, \ldots, v_\ell] \subseteq [w_1, \ldots, w_k]$

$v_i \in [v_1, \ldots, v_\ell]$ pois $v_i = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 1 \cdot v_i + 0\, v_{i+1} + \cdots + 0v_\ell$

$\Rightarrow v_i \in [w_1, \ldots, w_k]$

$(\Leftarrow)$ Suponha $v_i \in [w_1, \ldots, w_k] \quad \forall i$

$\Rightarrow v_i = a_{1i} w_1 + a_{2i} w_2 + \cdots + a_{ki} w_k = \sum a_{ji} w_j$

Dado $u = x_1 v_1 + \cdots + x_\ell v_\ell \in [v_1, \ldots, v_\ell]$ temos

$$u = x_1 \sum a_{j1} w_j + x_2 \sum a_{j2} w_j + \cdots + x_\ell \sum a_{j\ell} w_j$$

$$= \sum_{j,i} a_{ji} x_i w_j = \left(\sum_i a_{1i} x_i\right) w_1 + \cdots + \left(\sum_i a_{ki} x_i\right) w_k \in$$

$$\in [w_1, \ldots, w_k] \quad \blacksquare$$

Exemplo: $v_1 = (-1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (-1, 2, 1)$

$w_1 = (0, 1, 1)$, $w_2 = (2, -1, 1)$

$[w_1, w_2] \subset [v_1, v_2, v_3]$:

$$\boxed{\begin{aligned} w_1 &= (0,1,1) = v_1 + v_2 \in [v_1, v_2, v_3] \\ w_2 &= (2,-1,1) = v_2 - v_1 \in [v_1, v_2, v_3] \end{aligned}}$$