Def: Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é um subespaço vetorial se

① $0 \in S$
② $u, v \in S \Rightarrow u+v \in S$
③ $u \in S$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda u \in S$

Dada uma aplicação linear $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Def: Imagem de T:

$$Im(T) = \{ v \in \mathbb{R}^m \mid v = T(u) \text{ para algum } u \in \mathbb{R}^n \} \subseteq \mathbb{R}^m$$

$$N(T) = \{ u \in \mathbb{R}^n \mid T(u) = 0 \} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Prop: $Im(T) \subseteq \mathbb{R}^m$ e $N(T) \subseteq \mathbb{R}^n$ são subespaços vetoriais

Dem:

Im(T):

① $0 = T(0) \Rightarrow 0 \in Im(T)$

② Sejam $v_1, v_2 \in Im(T) \Rightarrow v_1 = T(u_1)$ e $v_2 = T(u_2)$

Logo $v_1 + v_2 = T(u_1) + T(u_2) = T(u_1 + u_2) \Rightarrow v_1 + v_2 \in Im(T)$

③ Se $v \in Im(T)$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow v = T(u)$

$\Rightarrow \lambda v = T(\lambda u) \Rightarrow \lambda v \in Im\,T$ //

N(T): ① $T(0) = 0 \Rightarrow 0 \in N(T)$

② Se $u, v \in N(T) \Rightarrow T(u+v) = T(u) + T(v) = 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow u+v \in N(T)$

③ $u \in N(T)$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow T(\lambda u) = \lambda T(u) = \lambda 0 = 0$

$\Rightarrow \lambda u \in N(T)$ ∎

Exemplos de Subespaços

① $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\}$

i) $(0,0,0) \in S$ pois $2\cdot 0 - 0 + 3\cdot 0 = 0$

ii) Se $(a,b,c), (d,e,f) \in S$

$\Rightarrow (a,b,c) + (d,e,f) = (a+d, b+e, c+f)$

Mas $2(a+d) - (b+e) + 3(c+f) = (2a - b + 3c) + (2d - e + 3f) = 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow (a,b,c) + (d,e,f) \in S$

iii) Se $(a,b,c) \in S$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \lambda(a,b,c) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ mas

$2\lambda a - \lambda b + 3\lambda c = \lambda(2a - b + 3c) = \lambda 0 = 0$

$\Rightarrow \lambda(a,b,c) \in S$

Logo S é um subespaço vetorial.

<u>OBS</u>: Note que $S = N(T)$ onde $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $T(x,y,z) = 2x - y + 3z$

2) $S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2z = 0 \text{ e } x + y - t = 0\}$

i) $0 = (0,0,0,0) \in S$ pois $0 - 2\cdot 0 = 0$ e $0 + 0 - 0 = 0$

ii) Se $u_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1) \in S$, $u_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2)$

Temos: $\begin{cases} (x_1 + x_2) - 2(z_1 + z_2) = (x_1 - 2z_1) + (x_2 - 2z_2) = 0 + 0 = 0 \\ (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (t_1 + t_2) = (x_1 + y_1 - t_1) + (x_2 + y_2 - t_2) = 0 + 0 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow u_1 + u_2 \in S$

iii) se $u = (a, b, c, d) \in S$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \lambda u = (\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d)$ mas

$$\begin{cases} \lambda a - 2\lambda c = \lambda(a - 2c) = \lambda 0 = 0 \\ \lambda a + \lambda b - \lambda d = \lambda(a + b - d) = \lambda 0 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda u \in S$

<u>OBS</u>: Note que $S = N(T)$ onde

$$T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(x, y, z, t) = (x - 2z, x + y - t)$$

<u>Em geral</u>:

Seja $S = \{(x_1, \dots, x_n) \mid * \}$

$$* : \begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = 0 \end{cases} \Rightarrow S \text{ é subespaço}$$

pois $S = N(T)$ onde $T = T_A$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ ∎

$*$ é um sistema de equações lineares homogêneo com n incógnitas e m equações

3) $S = \{(x - 2y, x + y, 2x) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$

i) $0 \in S$ pois $0 = (0,0,0) = (0 - 2\cdot 0, 0 + 0, 2 \cdot 0)$ $(x = 0, y = 0)$

ii) $(a - 2b, a + b, 2a) + (c - 2d, c + d, 2d) = (a + c - 2(b + d), (a + c) + (b + d), 2(a + d))$

$\in S$

iii) $\lambda (a - 2b, a + b, 2a) = (\lambda a - 2\lambda b, \lambda a + \lambda b, 2\lambda a) \in S$

OBS: Note que $S = \operatorname{Im} T$ onde

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$T(x,y) = (x-2y, x+y, 2x)$$

OBS: Podemos escrever $S = \{ x(1,1,2) + y(-2,1,0) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$

Teorema: Sejam $u_1, \dots, u_\ell \in \mathbb{R}^n$ e

$$S = \{ x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_\ell v_\ell \mid x_i \in \mathbb{R} \}$$

$\Rightarrow$ S é um subespaço vetorial

Dem: (i) $0 \in S$: Tome $x_1 = x_2 = \dots = x_\ell = 0$

(ii) $(a_1 v_1 + \dots + a_\ell v_\ell) + (b_1 v_1 + \dots + b_\ell v_\ell) =$

$$= (a_1 + b_1) v_1 + \dots + (a_\ell + b_\ell) v_\ell \in S$$

iii) $\lambda (a_1 v_1 + \dots + a_\ell v_\ell) = (\lambda a_1) v_1 + \dots + (\lambda a_\ell) v_\ell \in S$

$\blacksquare$

Def/Notação: O subespaço vetorial

$$S = \{ x_1 v_1 + \dots + x_\ell v_\ell \mid x_i \in \mathbb{R} \}$$

é chamado de subespaço gerado por $u_1, \dots, u_\ell \in \mathbb{R}^n$

e denotado por $S = [v_1, \dots, v_\ell]$

Cuidado! Geradores Não são únicos!

Exemplos:

1) S de ex. 3: $S = [(1,1,2), (-2,1,0)]$

2) $\mathbb{R}^n = [e_1, \dots, e_n]$, 3) $\{0\} = [0]$

4) $\operatorname{Im} T = [T(e_1), \dots, T(e_n)]$, 5) Se $S = [v_1, \dots, v_\ell] \Rightarrow S = \operatorname{Im} T$ onde $T: \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$, $T(f_i) = u_i$