Na ultima aula:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

Soma: $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$

Produto p/ Escalar: $\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$

Aplicação linear:

$T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é aplicação linear se

① $T(u+v) = T(u) + T(v)$
② $T(\lambda u) = \lambda T(v)$

$\forall u, v \in \mathbb{R}^n, \ \lambda \in \mathbb{R}$

<u>OBS</u>: Se T é linear $\Rightarrow$ $T(\vec{0}) = \vec{0}$

$\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ $\qquad$ $\vec{0} \in \mathbb{R}^m$

Pois $\vec{0} = 0 \cdot u \Rightarrow T(\vec{0}) = T(0u) = 0T(u) = \vec{0}$ ■

$\boxed{\text{Não Exemplo: } T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ T(x,y) = x^2 - y}$

Vimos o seguinte exemplo de aplicação linear:

$a \in \mathbb{R}$, $\quad T_a: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$T_a(u) = a \cdot u$

Quando $n=1$, toda aplicação linear $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é desta forma

<u>Proposição</u>: Seja $T: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação linear.

Então exista $a \in \mathbb{R}$ tal que $T = T_a$

<u>Dem</u>: Seja $a = T(1)$. Vamos mostrar que $T(x) = ax$

$\forall x \in \mathbb{R}$. Podemos escreve $x = x \cdot 1$

$\Rightarrow T(x) = T(x1) = xT(1) = xa = ax$. ■

Vamos generalizar esta proposição para aplicações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$.

A parte crucial da demonstração era

$$\begin{cases} \bullet \quad x = x \cdot 1 \\ \bullet \quad \text{Conhecendo o valor de } T(1) \text{ sabemos} \\ \quad \text{que } \quad T(x) = x\,T(1) \end{cases}$$

Em $\mathbb{R}^n$ temos elementos especiais (cumprem para $\mathbb{R}^n$ o mesmo papel que 1 cumpre para $\mathbb{R}$)

Sejam: $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$

$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$

$\vdots$

$e_i = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots 0)$ (i)

$\vdots$

$e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ (n)

Dado $u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, podemos escrever

$$u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

Exemplo: • $(-3, 1, 2) = -3e_1 + e_2 - 2e_3$ onde $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$

• $(2, 0, -1) = 2e_1 + 0 \cdot e_2 - e_3 = 2e_1 - e_3$

Se $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é linear e sabemos $T(e_1), T(e_2), \dots, T(e_n)$

$\Rightarrow$ Sabemos $T(u)$ $\forall u \in \mathbb{R}^n$

$$T(x_1, \dots, x_n) = x_1 T(e_1) + \dots + x_n T(e_n)$$

Mas $T(e_1) \in \mathbb{R}^m \Rightarrow T(e_1) = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1})$

$T(e_2) \in \mathbb{R}^m \Rightarrow T(e_2) = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2})$

$\vdots$

$T(e_j) \in \mathbb{R}^m \Rightarrow T(e_j) = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$

$\vdots$

$T(e_n) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow T(e_n) = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})$

Vamos organizar esta informação em uma matriz

$$A_T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

j-ésima coluna de A_T são as coord. de $T(e_j) \in \mathbb{R}^m$

$A_T \in \mathcal{M}_{m \times n}$ (Matriz com m-linhas e n-colunas)

<u>Def</u>: Dizemos que A_T representa a transformação linear $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

ATÉ AGORA VIMOS

$$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \rightsquigarrow A_T \in \mathcal{M}_{m \times n}$$

Agora vamos ver que $A \in \mathcal{M}_{n \times m} \rightsquigarrow T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Dado $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ definimos

$$T_A(x_1, \dots, x_n) = (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n)$$

Ou seja, se pensarmos em $\mathbb{R}^n = \mathcal{M}_{n\times 1} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_i \in \mathbb{R} \right\}$

e $\mathbb{R}^m = \mathcal{M}_{m\times 1} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \middle| y_i \in \mathbb{R} \right\}$

$$\Rightarrow \quad T_A(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{(Produto de Matriz)}$$

<u>Exercício</u>:
- Verifique que $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é linear
- Verifique que $A_{T_A} = A$, $T_{A_T} = T$