Objetivo: Estudar aplicações lineares

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad (n=m)$

Ideia: Encontrar subespaços $S \subsetneq \mathbb{R}^n$ tais que $T(S) \subset S$

$\rightsquigarrow$ Nesse caso $\dim S < \dim \mathbb{R}^n = n$ e é mais fácil entender $T|_S : S \to S$

Def: Seja $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear.

Um subespaço invariante por T é um subespaço $S \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\underbrace{T(v) \in S \text{ para todo } v \in S}_{T(S) \subseteq S}$

Exemplo $N(T)$ é um subespaço invariante

$$T(v) = 0 \in N(T) \quad \forall v \in N(T)$$

Exemplo:

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad T(x,y,z) = (2x, x+y, 3x-z)$

$S_1 = [(1,1,1)] \qquad T(\lambda(1,1,1)) = \lambda T(1,1,1) = \lambda(2,2,2) \in [(1,1,1)]$

$S_2 = [(0,1,0)] \qquad T(\lambda(0,1,0)) = \lambda T(0,1,0) = \lambda(0,1,0) \in [(0,1,0)]$

$S_3 = [(0,0,1)] \qquad T(\lambda(0,0,1)) = \lambda(0,0,1) \in [(0,0,1)]$

São subespaços invariantes

Exemplo $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad T(x,y) = (y,x)$ (Reflexão na reta $r = [(x,x)]$)

$S_1 = [(1,1)], \quad S_2 = [(1,-1)]$

Exemplo: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x,y) = (y,-x)$ Rotação por $\pi/2$

NÃO TEM SUBESPAÇO Invariante

- Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço invariante por $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Seja $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_r, f_{r+1}, \dots, f_n)$ uma base $\mathbb{R}^n$

onde $(f_1, \dots, f_r)$ é base de S

$$[T]_{\mathcal{F}} := [T]_{\mathcal{F}\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{matrix}} & \begin{matrix} b_{1,r+1} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \vdots & & \vdots \\ b_{n,r+1} & \cdots & b_{nn} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$T|_S : S \to S$$

$$T(f_1) = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 + \dots + a_{r1} f_r$$
$$T(f_2) = a_{12} f_1 + a_{22} f_2 + \dots + a_{r2} f_r$$
$$\vdots$$
$$T(f_r) = a_{1r} f_r + a_{2r} f_r + \dots + a_{rr} f_r$$

- Se $\mathbb{R}^n = S_1 \oplus S_2$ com S_1 e S_2 invariantes por T

e $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_r, f_{r+1}, \dots, f_n)$ é base de $\mathbb{R}^n$

com $(f_1, \dots, f_r)$ bese de S_1, $(f_{r+1}, \dots, f_n)$ bese de S_2

$$\Rightarrow [T]_{\mathcal{F}} = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

onde $\begin{cases} A \in M_{r \times r} \text{ representa } T|_{S_1} : S_1 \to S_1 \\ B \in M_{n-r \times n-r} \text{ representa } T|_{S_2} : S_2 \to S_2 \end{cases}$

<u>Exemplo</u>: $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad T(x,y,z) = (-x, -2x+z, -y)$

$\mathbb{R}^3 = S_1 \oplus S_2$

$S_1 = [(0,1,1), (0,1,-1)]$, $\quad S_2 = [(1,1,1)]$

$$\mathcal{F} = ((0,1,1), (0,1,-1), (1,1,1)) \rightsquigarrow [T]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{-1} \end{pmatrix}$$

- No melhor dos casos:

$$\mathbb{R}^n = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_n \qquad (\dim S_i = 1)$$

com S_i invariante por T.

Nesse caso, se $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ é base com $f_i \in S_i$

$$[T]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$T(f_i) = \lambda f_i$

NESSE CASO DIZEMOS QUE T é diagonalizável e $\mathcal{F}$ é uma base que diagonaliza T

Exemplo: $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad T(x,y,z) = (2x, x+y, 3x-z)$

$S_1 = [(1,1,1)]$, $S_2 = [(0,1,0)]$, $S_3 = [(0,0,1)]$

$$\mathcal{F} = ((1,1,1), (0,1,0), (0,0,1))$$

$$[T]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix}$$

Pergunta: • Como encontrar subespaços invariantes para $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$?

- Como saber se T é diagonalizável?
- Qual a matriz de T numa base que diagonaliza T?

Ideia: Se $T(v) = \lambda v \Rightarrow S = [v]$ é invariante

Def: Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Dizemos que λ é um autovalor de $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, se existe $v \neq 0$ tal que $T(v) = \lambda v$

Neste caso, dizemos que v é um autovetor com autovalor λ.

Def: Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ um autovalor de $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

$S_\lambda = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid T(v) = \lambda v \}$ é o autoespaço de λ.

OBS: A definição de S_λ faz sentido para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ (autovalor ou não).

Prop: Sejam $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $S_\lambda = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid T(v) = \lambda v \}$. Então

1. S_λ é um subespaço
2. S_λ é invariante
3. λ é auto-valor $\iff \dim S_\lambda \neq 0$

Dem: 1

- $0 \in S_\lambda$ pois $T(0) = 0 = \lambda 0$
- Sejam $v, w \in S_\lambda \Rightarrow T(v+w) = T(v) + T(w) = \lambda v + \lambda w$
$= \lambda(v+w)$
$\Rightarrow v + w \in S_\lambda$

- seja $v \in S_\lambda$, $a \in \mathbb{R} \Rightarrow T(av) = a\,T(v) = a\lambda v = \lambda(av)$
$\Rightarrow av \in S_\lambda$

2 Se $v \in S_\lambda \Rightarrow T(v) = \lambda v \in S_\lambda \Rightarrow S_\lambda$ é invariante

3 λ é autovalor $\iff \exists v \neq 0$ t.q. $T(v) = \lambda v \iff \exists v \neq 0,\ v \in S_\lambda$

$\iff S_\lambda \neq \{0\} \iff \dim S_\lambda \neq 0$

■

Exemplo: $\lambda = 0 \Rightarrow S_0 = N(T)$

$\lambda = 0$ é autovalor $\iff N(T) \neq \{0\} \iff T$ não é injetor

Nesse caso, uma base de $N(T)$ será uma base do autoespaço $S_0 = N(T)$.

Prop: Se $\lambda \neq \mu \Rightarrow S_\lambda \cap S_\mu = \{0\}$

Dem: Suponha que $v \in S_\lambda \cap S_\mu$.

$\Rightarrow T(v) = \lambda v$, $T(v) = \mu v \Rightarrow \lambda v = \mu v \Rightarrow (\lambda - \mu) v = 0 \overset{\lambda \neq \mu}{\Rightarrow} v = 0$

■

<u>Ideia</u> (1) Descobrir todos os autovalores de $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$$\Lambda_T = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k \mid \lambda_i \text{ é autovalor de } T\}$$

(2) Encontrar S_{λ_i} para cada autovalor $\lambda_i \in \Lambda$ e calcular dimensão de S_{λ_i}

(3) Se $\dim S_{\lambda_1} + \cdots + \dim S_{\lambda_k} = \dim \mathbb{R}^n = n$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^n = S_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus S_{\lambda_k}$$

e encontremos uma decomposição em subespaços invariantes

Nesse caso se

$$F = (\underbrace{f_1, \dots, f_{r_1}}_{S_{\lambda_1}}, \underbrace{f_{r_1+1}, \dots, f_{r_2}}_{S_{\lambda_2}}, \dots, f_n) \quad \text{base de } \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow [T]_F = \begin{pmatrix} \overbrace{\lambda_1 \cdots \lambda_1}^{\dim S_{\lambda_1}} & & & \\ & \overbrace{\lambda_2 \cdots \lambda_2}^{\dim S_{\lambda_2}} & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \underbrace{\lambda_k \cdots \lambda_k}_{\dim S_{\lambda_k}} \end{pmatrix}$$

F é uma base que diagonaliza T e T é diagonalizável

<u>Pergunta</u>: Como encontrar os autovalores de T?

<u>Prop</u>: $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de $T \iff N(T - \lambda I) \neq \{0\}$

$\iff \operatorname{Det}(T - \lambda I) = 0$

<u>Dem</u>: λ autovalor $\iff \exists v \neq 0$ t.q. $T(v) = \lambda v \iff \exists v \neq 0$ t.q. $T(v) - \lambda v = 0$

$\iff \exists v \neq 0$ t.q. $v \in N(T - \lambda I) \iff \operatorname{Det}(T - \lambda I) = 0$ ∎