Teorema: Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço. $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_d)$ é base de S $\Leftrightarrow$ $\{f_1, \dots, f_d\}$ é um subconjunto L.I. maximal

Dem: $(\Rightarrow)$ Suponha $\mathcal{F}$ base

$\Rightarrow$ $f_1, \dots, f_d$ L.I. Precisamos mostrar que é maximal

Seja $v \in S$ $\Rightarrow$ $v = a_1 f_1 + \dots + a_d f_d$

$\Rightarrow$ $f_1, \dots, f_d, v$ é L.D. $\left(\underbrace{a_1 f_1 + \dots + a_d f_d}_{\text{comb. Linear não trivial}} - v = 0 \right)$

$\Rightarrow$ $\{f_1, \dots, f_d\}$ L.I. maximal

$(\Leftarrow)$ Suponha $\{f_1, \dots, f_d\}$ L.I. maximal

$\Rightarrow$ $f_1, \dots, f_d$ L.I. e precisamos mostrar que $S = [f_1, \dots, f_d]$

- $f_1, \dots, f_d \in S$ $\Rightarrow$ $[f_1, \dots, f_d] \subset S$
- Vamos mostrar que $S \subset [f_1, \dots, f_d]$:

Seja $v \in S$ $\Rightarrow$ $f_1, \dots, f_d, v$ L.D.

$\Rightarrow$ $\exists a_1, \dots, a_d, b \in \mathbb{R}$ t.q. $a_1 f_1 + \dots + a_d f_d + bv = 0$

com $a_i \neq 0$ p/ algum i ou $b \neq 0$

Afirmação: $b \neq 0$ (pois se $b = 0 \Rightarrow a_1 f_1 + \dots + a_d f_d = 0 \Rightarrow a_1 = \dots = a_d = 0$)

$\Rightarrow$ $v = -\frac{a_1}{b} f_1 - \dots - \frac{a_d}{b} f_d \in [f_1, \dots, f_d]$ ■

Teorema (Completamento):
Sejam $v_1, \dots, v_\ell$ L.I., $v_1, \dots, v_\ell \in S$. Então existe uma base $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_d)$ de S com $f_1 = v_1, \dots, f_\ell = v_\ell$.

Dem:

- Se $(v_1, \dots, v_\ell)$ é base de S acabou.
- Se $(v_1, \dots, v_\ell)$ Não é base $\Rightarrow$ Não é L.I. maximal

$\Rightarrow \exists\, f_{\ell+1} \in S$ t.q. $v_1, \dots, v_\ell, f_{\ell+1}$ L.I.

- Se $(v_1, \dots, v_\ell, f_{\ell+1})$ é base de S acabou
- Se $(v_1, \dots, v_\ell, f_{\ell+1})$ Não é base $\Rightarrow$ Não é L.I. maximal

$\Rightarrow \exists\, f_{\ell+2} \in S$ t.q. $v_1, \dots, v_\ell, f_{\ell+1}, f_{\ell+2}$ é L.I.

se for maximal acabou. Se não for continua até ficar maximal.

$\blacksquare$

Exemplo:

Sejam $v_1 = (1,0,-1,1)$, $v_2 = (1,1,-1,0)$

Completar p/ base de $\mathbb{R}^4$

Vamos escolher algum $v_3 \in \mathbb{R}^4$ t.q. $v_3 \notin [v_1, v_2]$

$[v_1, v_2] = \{(a+b, b, -a-b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

se $v_3 = (x, y, z, w) \in [v_1, v_2] \Rightarrow z = -x$

Logo $v_3 = (1,0,0,0) \notin [v_1, v_2] \Rightarrow v_1, v_2, v_3$ L.I.

Vamos escolher $v_4 \notin [v_1, v_2, v_3]$:

$[v_1, v_2, v_3] = \{(a+b+c, b, -a-b, a) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$

se $(x, y, z, w) \in [v_1, v_2, v_3] \Rightarrow -w-y = z$

$\Rightarrow v_4 = (0,0,1,0) \notin [v_1, v_2, v_3] \Rightarrow B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ é base de $\mathbb{R}^4$ $\blacksquare$

Consequencias :

Corolário 1 : Suponha que $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^n$ sejam subespaços. Se $S_1 \subset S_2$ então $\dim S_1 \leq \dim S_2$ e $\dim S_1 = \dim S_2 \iff S_1 = S_2$

Dem: Complete uma base de S_1 para S_2

Teorema (Núcleo & Imagem)

Seja $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear. Então

$$\dim N(T) + \dim Im(T) = n = \dim \mathbb{R}^n$$

Dem: Seja $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_d)$ uma base de $N(T)$

complete para uma base $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_d, f_{d+1}, \dots, f_n)$ de $\mathbb{R}^n$

Vamos mostrar que $\mathcal{G} = (T(f_{d+1}), \dots, T(f_n))$ é base de $Im(T)$.

(i) $Im(T) = [T(f_{d+1}), \dots, T(f_n)]$:

- $\supseteq$ imediato
- $\subseteq$ Se $v \in Im T \Rightarrow v = T(u)$ $u \in \mathbb{R}^n$

$$u = a_1 f_1 + \dots + a_d f_d + a_{d+1} f_{d+1} + \dots + a_n f_n$$

$$\Rightarrow T(u) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(f_i) = \sum_{i=d+1}^{n} a_i T(f_i) \in [T(f_{d+1}), \dots, T(f_n)]$$

(ii) $T(f_{d+1}), \dots, T(f_n)$ L.I.

Suponha $a_{d+1} T(f_{d+1}) + \cdots + a_n T(f_n) = 0$

$\Rightarrow T(a_{d+1} f_{d+1} + \cdots + a_n f_n) = 0$

$\Rightarrow a_{d+1} f_{d+1} + \cdots + a_n f_n \in N(T)$

$\Rightarrow a_{d+1} f_{d+1} + \cdots + a_n f_n = a_1 f_1 + \cdots + a_d f_d$

$\Rightarrow -a_1 f_1 - \cdots - a_d f_d + a_{d+1} f_{d+1} + \cdots + a_n f_n = 0$

$\Rightarrow a_i = 0 \quad \forall i \quad \Rightarrow \quad T(f_{d+1}), \dots, T(f_n)$ L.I. $\blacksquare$