• O que é Álgebra Linear?

É o estudo de

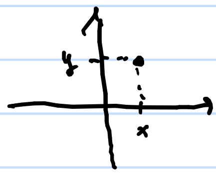
Espaços Vetoriais & Transformações lineares entre esses espaços

Vamos começar este curso falando de $\underbrace{\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots, \mathbb{R}^n}_{\text{Exemplos de esp. vet.}}$

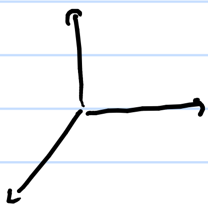
& aplicações lineares $T: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Depois vamos passar p/ espaços vetoriais gerais.

• $\mathbb{R} = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

• $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$



• $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$



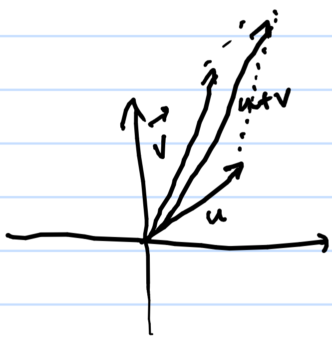
• $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$

Vamos chamas os elementos de $\mathbb{R}^n$ de vetores e escrever $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$.

Temos Duas operações em $\mathbb{R}^n$

① Soma de vetores:

$$u + v = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)$$



② Multiplicação Por Escalar $\lambda \cdot u = (\lambda u_1, \dots, \lambda u_n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Estas operações satisfazem algumas propriedades (que futuramente serão usadas como axiomas de esp. vet.)

(S1) A soma é associativa

$$(u+v)+w = u+(v+w)$$

(S2) A soma é comutativa

$$u+v = v+u$$

(S3) Se $\vec{0} = (0,0,\ldots,0)$ é o vetor nulo

$$\Rightarrow \vec{0}+u = u+\vec{0} = u$$ (Elemento neutro da soma)

(S4) Se $-u = -1\cdot u = (-u_1,\ldots,-u_n)$

$$\Rightarrow u+(-u) = \vec{0}$$ (elemento inverso da soma)

(M1) O produto por escalar é associativo

$$\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$$

(M2) Distributiva sobre soma de vetores

$$\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$$

(M3) Distributiva sobre escalares

$$(\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u$$

(M4) $1\cdot u = u$

Exercício: Verifique que valem estas propriedades

Def: Uma função $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é uma <u>transformação linear</u> se

① $T(u+v) = T(u) + T(v) \qquad \forall\, u, v \in \mathbb{R}^n$

② $T(\lambda u) = \lambda T(u) \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ u \in \mathbb{R}^n$

Exemplo: $(n = m = 1)$

Considere $\begin{aligned} T: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x \end{aligned}$

Então T é linear pois

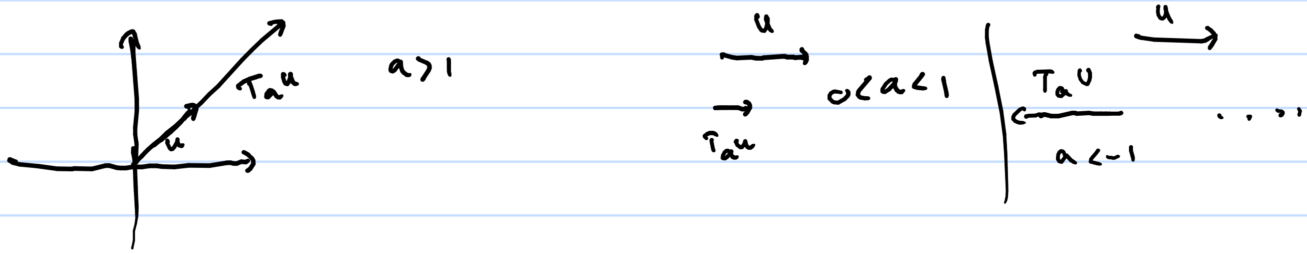
- $T(x+y) = 2(x+y) = 2x + 2y = T(x) + T(y)$
- $T(\lambda x) = 2(\lambda x) = (2\lambda)x = (\lambda 2)x = \lambda(2x) = \lambda T(x)$

Mais geralmente: Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere

$\begin{aligned} T_a: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\longmapsto au \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad T_a$ é linear

- $T_a(u+v) = a(u+v) = au + av = T_a(u) + T_a(v)$
- $T_a(\lambda u) = a(\lambda u) = (a\lambda)u = \lambda(au) = \lambda T_a(u)$

Qual o "efeito" da transformação T_a?



Prop: Se $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n=1=m)$ é uma aplicação linear

$\Rightarrow \exists\, a \in \mathbb{R}$ tal que $T = T_a$

Dem: Seja $a = T(1)$. Note que se $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow x = x \cdot 1 \Rightarrow T(x) = T(x \cdot 1) = x\,T(1) = T(1) \cdot x = ax =$

Linear

$= T_a(x)$

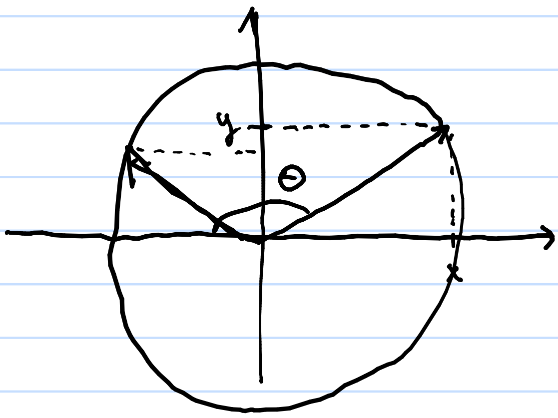
Como $T(x) = T_a(x)\ \forall x \Rightarrow T = T_a$ $\blacksquare$

Será que o mesmo vale para $n = m > 1$?

NÃO!

Exemplo: Rotação por um ângulo θ em $\mathbb{R}^2$

$$R_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta,\ x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta)$$



Exercício: a) Mostre que R_θ representa uma rotação por θ no sentido anti-horário

b) Mostre que R_θ é linear

c) Calcule a composta $R_\theta \circ R_\alpha = R_{\theta+\alpha}$

Era "otimismo" demais querer generalizar a proposição de maneira tão "ingênua". Mas podemos generalizar de outra forma:

- Pensamos em $a \in \mathbb{R}$ como uma matriz 1×1

$\Rightarrow$ $T = T_a$ = multiplicação por a

- Dada uma matriz $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Obtemos uma transformação linear

$$T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$T_A(u) = (a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n}v_n, a_{21}v_1 + \cdots + a_{2n}v_n, \ldots, a_{m1}v_1 + \cdots + a_{mn}v_n)$$

$$T_A(u) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

<u>Teorema</u>: Toda transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é da forma T_A para alguma matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$

<u>Exemplo</u>: $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$