MAT134 – Prova 1

Nome: ______________________________

Número USP: ______________________________

**Escolha 3 das quatro questões abaixo para serem resolvidas. Indique claramente quais questões devem ser corrigidas. Caso você escreva em todas as questões e não indique quais devem ser corrigidas eu irei considerar somente as 3 primeiras. Para que uma questão não seja corrigida risque a questão e escreva BEM GRANDE "Não Corrigir".**
**Justifique <u>TODAS</u> as suas respostas. Boa prova!**

1. Seja $V$ um espaço vetorial de dimensão $n$, $v_1, \ldots, v_k \in V$ e $S_1, S_2, S_3 \subset V$ subespaços vetoriais

   Para cada uma das questões abaixo, determine se a afirmação é verdadeira ou falsa. Caso seja verdadeira, demonstre a afirmação. Caso seja falsa, dê um contra exemplo.

   (a) (1 ponto) $(S_1 \cap S_3) + (S_2 \cap S_3) \subseteq (S_1 + S_2) \cap S_3$.

   (b) (1,5 pontos) $\dim(S_1 \cap S_3) + \dim(S_2 \cap S_3) = \dim((S_1 + S_2) \cap S_3) + \dim(S_1 \cap S_2 \cap S_3)$.

   (c) (1,5 ponto) Se $v_1, \ldots, v_k$ são linearmente independentes e $w$ não pertence a espaço gerado por $v_1, \ldots, v_k$ então necessariamente $v_1, \ldots, v_k, w$ são linearmente independentes.

2. Considere os seguintes vetores de $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (1, -2, -1, 1), \quad v_2 = (-1, 1, 1, 0), \quad v_3 = (-1, -1, 1, 2).$$

Seja $A = \{v_1, v_2, v_3\}$ e considere o subespaço $S = [A]$ de $\mathbb{R}^4$, onde $[A]$ denota o subespaço gerado por $A$.

(a) (2 pontos) Encontre uma base de $S = [A]$ cujos elementos da base pertencem a $A$.

(b) (2 pontos) Complete a base do exercício anterior para uma base de $\mathbb{R}^4$. Justifique o processo que você utilizou para obter essa base.

3. Seja $V = P_2(\mathbb{R})$, e considere os seguintes subespaços de $V$

$$S_1 = \{p(t) \in P_2(\mathbb{R}) : p(1) = 0\}$$

$$S_2 = \{p(t) \in P_2(\mathbb{R}) : p(-1) = 0)\}.$$

(a) (1,5 pontos) Determine uma base e a dimensão de $S_1 \cap S_2$.

(b) (1,5 pontos) Mostre que todo polinômio $p \in P_2(\mathbb{R})$ pode ser escrito como uma soma $p = q_1 + q_2$ onde $q_1 \in S_1$ e $q_2 \in S_2$.

(c) (1 ponto) A decomposição do item anterior é única? Justifique sua resposta com uma demonstração caso seja única ou com um contra-exemplo caso não seja única.

4. Considere a transformação linear dada por

$$T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+d & a+b+c \\ b+c+d & a \end{pmatrix}.$$

(a) (2 pontos) Encontre uma base e a dimensão do núcleo de $T$ (lembre que o núcleo de $T$ é o subespaço $N(T) = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : T(A) = 0\}$).

(b) (2 pontos) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 \\ -1 & m \end{pmatrix}.$$

Determine $m \in \mathbb{R}$ tal que $A \in \operatorname{Im}(T)$ (ou seja, tal que $A$ pertence a imagem de $T$).