MAT134 - Introdução à Álgebra Linear – Lista 5

Resolva os exercícios abaixo. Entregue os exercícios 1(e), 2, 8(a), e 9(a) no dia 07/12 antes do início da prova. Justifique todas as suas respostas.

1. Calcule o determinante das seguintes matrizes. Explique detalhadamente como você fez o cálculo (se vc usou alguma fórmula escreva ela, se vc usou as propriedades escreva quais, etc...):

   (a)
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (b)
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

   (c)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

   (d)
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

   (e)
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Sejam A e B matrizes 4×4 invertíveis tais que
$$\mathrm{Det}\left(3B^3\left(A^2B^2\right)^{-1}\right) = 162, \qquad \mathrm{Det}B = 2\mathrm{det}A^t.$$
   Determine os valores de $\mathrm{Det}A$ e $\mathrm{Det}B$.

3. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear e suponha que $v_1, \ldots, v_n$ sejam autovetores de T correspondentes a autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ onde $\lambda_i \neq \lambda_j$ para todo $i \neq j$. Mostre que $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente independentes. (Dica: a demonstração deve ser feita por indução em n; o número de vetores. Faça o argumento nos casos $n = 1, 23$ para entender o que está acontecendo e depois escreva o argumento geral.)

4. Mostre que se $T : V \to V$ é uma transformação linear idenpotente onde V é um espaço vetorial de dimensão n, então T é diagonalizável. Escreva a matriz de T em uma base qua a torne diagonal.

5. Considere a aplicação $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ dada por

$$T(A) = A + A^t.$$

   (a) Encontre todos os autovalores de T.

   (b) Encontre uma base para cada autoespaço de T.

   (c) Calcule as multiplicidades algébricas e geométricas de cada autovalor.

   (d) Decida se T é diagonalizaável (JUSTIFIQUE!) e caso seja encontre a matriz de T na forma diagonal.

   DICA: Escreva uma decomposição $\mathcal{M}_{2\times 2} = S_1 \oplus S_2$ onde S_1 e S_2 são subespaços invariantes por T.

6. Considere a aplicação $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ dada por

$$T(A) = A - A^t.$$

   (a) Encontre todos os autovalores de T.

   (b) Encontre uma base para cada autoespaço de T.

   (c) Calcule as multiplicidades algébricas e geométricas de cada autovalor.

   (d) Decida se T é diagonalizaável (JUSTIFIQUE!) e caso seja encontre a matriz de T na forma diagonal.

   DICA: Escreva uma decomposição $\mathcal{M}_{2\times 2} = S_1 \oplus S_2$ onde S_1 e S_2 são subespaços invariantes por T.

7. Em cada item abaixo é dada uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ representada por uma matriz na base canônica de $\mathbb{R}^2$. Para cada uma dessas transformação faça o seguinte: (i) Encontre todos os autovalores; (ii) Encontre uma base de cada autoespaço; (iii) Determine as multiplicidades algébricas e geométricas de cada autovalor; (iv) determine se a transformação linear é diagonalizável (JUSTIFIQUE CLARAMENTE SUA RESPOSTA!); (v) Caso seja diagonalizável, encontre uma base de autovetrores e escreva a matriz da transformação T nessa base.

   (a)
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

   (c)
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

   (d)
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(e)

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(f)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(g)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Em cada item abaixo é dada uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ representada por uma matriz na base canônica de $\mathbb{R}^3$. Para cada uma dessas transformação faça o seguinte: (i) Encontre todos os autovalores; (ii) Encontre uma base de cada autoespaço; (iii) Determine as multiplicidades algébricas e geométricas de cada autovalor; (iv) determine se a transformação linear é diagonalizável (JUSTIFIQUE CLARAMENTE SUA RESPOSTA!); (v) Caso seja diagonalizável, encontre uma base de autovetrores e escreva a matriz da transformação T nessa base.

   (a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

   DICA: $t = -2$ é uma raíz do polinômio $t^3 - 6t^2 + 32$.

   (b)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

   DICA: $t = -2$ é uma raíz do polinômio $t^3 - 12t - 16$.

   (c)

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   DICA: $t = -2$ é uma raíz do polinômio $t^3 - 2t + 4$.

   (d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   DICA: $t = 1$ é uma raíz do polinômio $t^3 - t^2 - t + 1$.

9. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcule a matriz A^{37}.

(b) Seja A^{-1} a matriz inversa de A. Calcule a matriz A^{-1}.

(c) Calcule a matriz $(A^{-1})^{13}$

DICA: Se B é uma matriz invertível e $n \in \mathbb{N}$, então $(BAB^{-1})^n = BA^nB^{-1}$ e portanto $A^n = B^{-1}(BAB^{-1})^nB$. Escolha uma base boa para fazer a conta!

Analogamente, $(BAB^{-1})^{-1} = B^{-1}A^{-1}B$ e portanto $A^{-1} = B(BAB^{-1})^{-1}B^{-1}$.