MAT134 - Introdução à Álgebra Linear – Lista 4

Resolva os exercícios abaixo. Entregue os exercícios 12, 13, 14 e 18 até o fim da aula do dia 30/10 (segunda-feira). Justifique todas as suas respostas.

1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear. Sabendo que $T(-1, 2) = (0, 3)$ e $T(2, 1) = (-2, 0)$, determine $T(1, 1)$.

2. Sejam A e B duas matrizes $m \times n$. Mostre que se $AX = BX$ para todo $X \in \mathbb{R}^n$ (pensando em X como uma matriz $n \times 1$), então $A = B$. Dê um exemplo de duas matrizes 2×2 e um vetor $X \in \mathbb{R}^2$ tais que $X \neq 0$, $AX = BX$, mas $A \neq B$ (isto mostr que na primeira afirmação importante que $AX = BX$ *para todo* $X \in \mathbb{R}^n$).

3. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que $T(0, 1) = (1, 1)$ e $T(0, 1) = (-1, 2)$. Seja Q o quadrado de vértices $(0, 0), (0, 1), (1, 1)$, e $(0, 1)$. Mostre que $T(Q)$ é um paralelograma (faça um desenho para ajudar!). Calcule a área de $T(Q)$.

4. Seja $T : V \to W$ uma aplicação linear e sejam $w_1, w_2, \ldots, w_n$ vetores linearmente independentes de W. Mostre que se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são vetores de V tais que $T(v_i) = w_i$, então $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são linearmente independentes. A recíproca é verdadeira? Ou seja, é verdade que se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são linearmente independentes então $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)$ são linearmente independentes? Prove ou dê um contra exemplo.

5. Seja V um espaço vetorial e $T : V \to \mathbb{R}$ uma aplicação linear. Suponha que $N(T) \neq V$ (onde $N(T)$ é o núcleo de T) e seja $v_0 \in V$ tal que $T(v_0) \neq 0$.
   (a) Mostre que todo elemento $v \in V$ pode ser escrito da forma $v = w + av_0$ onde $w \in N(T)$ e $a \in \mathbb{R}$.
   (b) Seja $S = [v_0]$ o subespaço gerado por v_0. Mostre que $V = S \oplus N(T)$.
   (c) Mostre que se $(v_1, \ldots, v_n)$ é uma base de $N(T)$, então $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ é base de V.

6. Seja $T : V \to W$ uma aplicação linear injetora. Mostre que se $v_1, \ldots, v_n \in V$ são linearmente independentes então $T(v_1), \ldots, T(v_n) \in W$ são linearmente independentes.

7. Sejam V e W espaços vetoriais tais que $\dim V > \dim W$. Mostre que se $T : V \to W$ é uma aplicação então $N(T) \neq \{0\}$.

8. Sejam V e W espaços vetoriais tais que $\dim V < \dim W$. Mostre que se $T : V \to W$ é uma aplicação então $\mathrm{Im}(T) \neq W$.

9. Sejam $F : V \to W$ e $G : W \to U$ aplicações lineares. Mostre que:
   (a) $\dim(\mathrm{Im}(G \circ F)) \leq \dim(\mathrm{Im} G)$.
   (b) $\dim(\mathrm{Im}(G \circ F)) \leq \dim(\mathrm{Im} F)$.

10. Seja V o espaço das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que admitem derivadas de todas as ordens.
    (a) Seja $D : V \to V$ a transformação $D(f) = f'$ que associa a cada função a sua derivada. Mostre que D é uma aplicação linear.
    (b) Mostre que o núcleo de D é o subespaçødas funções constantes (que é isomorfo a $\mathbb{R}$)

(c) Seja $D^2 = D \circ D : V \to V$ a transformação que associa a cada função a sua segunda derivada. Mostre que o núcleo de D^2 é o subespaço das funções da forma $N(D^2) = \{f(x) = ax + b : a, b \in \mathbb{R}\}$.

(d) Determine o núcleo da transformação $D^n : V \to V$ que associa a cada função a sua n-ésima derivada.

11. Seja $T : \mathcal{M}_{4\times 4} \to \mathcal{M}_{4\times 4}$ a transformação dada por

$$T(A) = \frac{A + A^t}{2},$$

onde A^t denota a transposta da matriz A.

(a) Mostre que a imagem de T é o subespaço das matrizes simétricas

$$\mathcal{S} = \{B \in \mathcal{M}_{4\times 4} : B = B^t\}.$$

(b) Mostre que $N(T)$ é o subespaço das matrizes anti-simétricas

$$\mathcal{A} = \{B \in \mathcal{M}_{4\times 4} : B = -B^t\}.$$

(c) Mostre que $\dim\mathcal{S} + \dim\mathcal{A} = 16$.

(d) Mostre que $\mathcal{M}_{4\times 4} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

12. Uma transformação linear $T : V \to V$ é dita idenpotente se $T^2 = T$ onde $T^2 = T \circ T$. Seja $T : V \to V$ uma aplicação linear idenpotente.

(a) Mostre que $V = N(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$.

(b) Escreva a matriz da transformação T em termos de uma base $B = (v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_n)$ onde $(v_1, \ldots, v_p)$ é uma base de $\mathrm{Im}(T)$ e $(v_{p+1}, \ldots, v_n)$ é uma base de $N(T)$.

(c) Verifique que a aplicação do exercício anterior é idenpotente.

(d) Mostre que a transformação linear

$$F = I - T : V \to V, \quad F(v) = v - T(v)$$

também é idenpotente.

(e) Mostre que $N(F) = \mathrm{Im}(T)$ e $\mathrm{Im}(F) = N(T)$.

OBS: Uma transformação linear idenpotente muitas vezes também é chamada de uma projeção.

13. Seja $v \in \mathbb{R}^3$ um vetor não nulo e seja $T_v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear dada por

$$T_v(w) = \frac{(v \cdot w)}{||v||^2} v,$$

onde $v \cdot w$ denota o produto escalar de v com w.

(a) Mostre que T_v é uma aplicação linear idenpotente.

(b) Mostre que $N(T) = v^\perp$, onde $v^\perp$ é o plano que passa pela origem e que tem v como um vetor normal.

(c) Conclua que $\mathbb{R}^3 = v^\perp \oplus v$.

14. Seja T_v a aplicação linear do exercício anterior. Seja $v = (-1, 1, 2)$ na base canônica de $\mathbb{R}^3$. Escreva as matrizes das transformações T_v e $I - T_v$ na base canônica de $\mathbb{R}^3$.

15. Sejam V e W espaços vetoriais. Lembre que o produto cartesiano de V com W é o espaço vetorial $V \times W = \{(v, w) : v \in V, w \in W\}$ com soma e produto por escalar dados por

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2), \quad a(v, w) = (av, aw).$$

   (a) Mostre que se $(v_1, \dots v_n)$ é base de V e $(w_1, \dots w_m)$ é base de W então uma base de $V \times W$ é dada por
   $$B = ((v_1, 0), \dots, (v_n, 0), (0, w_1), \dots (0, w_m)).$$
   Conclua que $\dim(V \times W) = \dim V + \dim W$.

   (b) Seja U um subespaço de V. Mostre que
   $$\Delta_U = \{(u, u) \in V \times V : u \in U\} \subset V \times V$$
   é um subespaço de $V \times V$.

   (c) Mostre que $\dim U = \dim \Delta_U$.

   (d) Mostre que se U_1 e U_2 são subespaços de V então a aplicação
   $$T : U_1 \times U_2 \to V, \quad T(u_1, u_2) = u_1 - u_2$$
   é uma aplicação linear.

   (e) Mostre que $\mathrm{Im}(T) = U_1 + U_2$

   (f) Mostre que $N(T) = \{(u, u) \in U_1 \times U_2 : u \in U_1 \cap U_2\} = \Delta_{U_1 \cap U_2} \subset U_1 \times U_2$.

   (g) Utilize o teorema do núcleo e da imagem para mostrar que
   $$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2).$$

16. Seja $T : V \to V$ uma aplicação linear e suponha que existe uma base $B = (v_1, \dots, v_n)$ de V tal que $T(v_i) = c_i v_i$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Mostre que a matriz de T nessa base é uma matriz diagonal (ou seja, se a matriz de T tem entradas a_{ij} na i-ésima linha e j-ésima coluna, então $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$).

17. Seja $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ o espaço de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que admitem derivadas de todas as ordens e seja $S \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$ o subespaço gerado por $S = [\mathrm{sen} x, \cos x]$. Seja $D : S \to S$ a aplicação linear que associa a cada função a sua primeira derivada. Qual é a matriz da transformação D com respeito a base $B = (\mathrm{sen} x, \cos x)$ de S?

18. Considere a aplicação linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ dada por
$$T(p(t)) = p'(t) + p'(1) - 2p(0) + p(t).$$

   (a) Determine a matriz de T com respeito a base $B = (1, t, t^2)$.

   (b) Determine a matriz de T com respeito a base $B = (1 + t, 1 - t, 1 - t^2)$.

19. Seja $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear que é uma rotação por um ângulo θ no sentido anti-horário.

   (a) Escreva a matriz da transformação T_θ em termos da base canônica $B = ((1, 0), (0, 1))$ de $\mathbb{R}^2$.

   (b) Sabendo que $T_{\theta+\tau} = T_\theta \circ T_\tau$, deduza as fórmulas para $\cos(\theta + \tau)$, e $\mathrm{sen}(\theta + \tau)$