MAT134 - Introdução à Álgebra Linear – Lista 3

1. Seja V um espaço vetorial de dimensão n, $v_1, \ldots, v_k \in V$ e $S_1, S_2, S_3 \subset V$ subespaços vetoriais

   Para cada uma das questões abaixo, determine se a afirmação é verdadeira ou falsa. Caso seja verdadeira, demonstre a afirmação. Caso seja falsa, dê um contra exemplo.

   (a) Se $k > n$ os vetores $v_1, \ldots, v_k$ são necessariamente linearmente dependentes.

   (b) Se $k > n$ os vetores $v_1, \ldots, v_k$ necessariamente geram o espaço V.

   (c) Se $k < n$ os vetores $v_1, \ldots, v_k$ são necessariamente linearmente independentes.

   (d) Se $k = n$ e $v_1, \ldots, v_k$ geram o espaço vetorial V, então necessariamente $\mathcal{B} = (v_1, \ldots v_k)$ é uma base de V.

   (e) Se $k = n$ e $v_1, \ldots, v_k$ são linearmente independentes, então necessariamente $\mathcal{B} = (v_1, \ldots v_k)$ é uma base de V.

   (f) $(S_1 + S_2) \cap S_3 = (S_1 \cap S_3) + (S_2 \cap S_3)$.

   (g) $(S_1 \cap S_3) + (S_2 \cap S_3) \subset (S_1 + S_2) \cap S_3$.

   (h) $\dim(S_1 \cap S_3) + \dim(S_2 \cap S_3) \leq \dim((S_1 + S_2) \cap S_3) + \dim(S_1 \cap S_2 \cap S_3)$.

   (i) Se $S_1 \subset S_2$ então necessariamente $\dim S_1 \leq \dim S_2$.

   (j) Se $S_1 \subset S_2$ e $\dim S_1 = \dim S_2$ então necessariamente $S_1 = S_2$.

   (k) Se $v_1, \ldots, v_k$ são linearmente independentes e w não pertence a espaço gerado por $v_1, \ldots, v_k$ então necessariamente $v_1, \ldots, v_k, w$ são linearmente independentes.

   (l) Se $v_1, \ldots, v_k$ são linearmente independentes, e $w \in V$ é tal que $v_1, \ldots, v_k, w$ são linearmente dependentes, então necessariamente w pode ser escrito como combinação linear de $v_1, \ldots, v_k$.

   (m) Se $v_1, \ldots, v_k$ são linearmente dependentes então necessariamente v_1 pode ser escrito como combinação linear de $v_2, \ldots, v_k$.

2. Considere os seguintes subespaços de $P_3(\mathbb{R})$

$$S_1 = \{p(t) \in P_3(\mathbb{R}) : 2p(0) = p(-1) = p(1)\}$$

$$S_2 = [t^3 + t - 1, t^2 - t - 1, t^3 + t^2 - 2],$$

$$S_3 = \{p(t) \in P_3(\mathbb{R}) : p'''(t) = 0\}.$$

   Seja

$$W = S_1 + (S_2 \cap S_3).$$

(a) Encontre uma base e a dimensão de W.

(b) Determine todos os valores de $a \in \mathbb{R}$ para os quais

$$p(t) = at^3 - t^2 + \frac{a^2}{2}t + 2a \in W.$$

3. Considere o seguinte subconjunto de $\mathrm{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Encontre uma base do subespaço $[A]$ (espaço gerado por A) cujos elementos da base pertencem a A.

(b) Complete a base do item anterior para uma base de $\mathrm{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$.

4. Em cada um dos exercícios abaixo são dados dois subconjuntos S_1 e S_2 de um espaço vetorial V. Verifique se estes subconjuntos são subespaços de V. Caso sejam subespaços, determine uma base, e a dimensão de $S_1 \cap S_2$, S_1, S_2 e $S_1 + S_2$. Complete cada uma dessas bases para uma base de V. Verifique também se a soma de S_1 com S_2 é uma soma direta.

(a) $V = \mathbb{R}^5$, $S_1 = [(1,0,1,-1,2),(0,1,-1,0,-1),(2,-1,3,-2,5)]$ (o espaço gerado por esses três vetores e

$$S_2 = \{(x_1,\dots,x_5) \in \mathbb{R}^5 : (x_1,\dots,x_5) \text{ satisfaz o sistema de equações lineares abaixo } \}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + +x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

(b) $V = P_3(\mathbb{R})$,

$$S_1 = \{p(t) \in P_3(\mathbb{R}) : p(1) = 0 \text{ e } p''' - p'' = 0\}$$

$$S_2 = \{p(t) \in P_3(\mathbb{R}) : p(1) = p(0) = p(-1), \text{ e } p''(1) - 2p'(-1) = 0\}.$$

(c) $V = \mathcal{M}_{4\times 4}$, S_1 é o conjunto das matrizes triangulares superiores, ou seja, o conjunto de todas as matrizes $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}$ tal que A é da forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}, \text{ com } a_{ij} \in \mathbb{R},$$

e S_2 é o conjunto das matrizes de traço zero, ou seja, o conjunto de todas as matrizes

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}, \text{ tal que } \mathrm{tr}B = b_{11} + b_{22} + b_{33} + b_{44} = 0.$$

(d) $V = \mathcal{M}_{n\times n}$,

$$S_1 = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n} : A = A^t\}$$

é o conjunto das matrizes simétricas (que são iguais às suas transpostas), e

$$S_2 = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n} : A = -A^t\}$$

é o conjunto das matrizes anti-simétricas (que são iguais aos negativos de suas transpostas).

(e) $V = \mathbb{R}^5$,

$$S_1 = [(1,0,-1,2,1),(0,0,1,-1,-1)]$$

$$S_2 = [(1,1,-1,2,1),(2,0,-1,3,1),(-1,1,1,-2,-1)]$$

onde $[v_1,\dots,v_k]$ denota o subespaço gerado por $v_1,\dots,v_k$.

5. Resolva os exercícios 18 a 27 da lista da poli (no link abaixo) para treinar escalonamento e análise das soluções de sistemas lineares:

   https://www.ime.usp.br/mat/3457/Listas/2017/Lista1%20-MAT3457%20-%202017.pdf