Gabarito P1

① V espaço vetorial de dimensão n,
$v_1, \ldots, v_k \in V$; $S_1, S_2, S_3 \subset V$
subespaços

a) $(S_1 \cap S_3) + (S_2 \cap S_3) \subseteq (S_1 + S_2) \cap S_3$

Verdadeira

Seja $u \in (S_1 \cap S_3) + (S_2 \cap S_3)$

$\Rightarrow$ $u = v_1 + v_2$ onde $v_1 \in S_1 \cap S_3$, $v_2 \in S_2 \cap S_3$

- Como $v_1 \in S_1$ e $v_2 \in S_2$ $\Rightarrow$ $\underbrace{v_1 + v_2}_{u} \in S_1 + S_2$
- Como $v_1 \in S_3$ e $v_2 \in S_3$ $\Rightarrow$ $v_1 + v_2 \in S_3$ pois S_3 é subespaço

Logo $u = v_1 + v_2 \in (S_1 + S_2) \cap S_3$

b) $\dim(S_1 \cap S_3) + \dim(S_2 \cap S_3) = \dim(S_1 + S_2) \cap S_3 + \dim S_1 \cap S_2 \cap S_3$

Falso

Contra-exemplo:

$V = \mathbb{R}^2$, $S_1 = [(1,0)]$, $S_2 = [(0,1)]$, $S_3 = [(1,1)]$

$S_1 \cap S_3 = \{0\}$, $S_2 \cap S_3 = \{0\}$, $S_1 + S_2 = \mathbb{R}^2$, $(S_1 + S_2) \cap S_3 = S_3$, $S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \{0\}$

$0 + 0 \neq 1 + 0$

c) Se $v_1, \dots, v_k$ são L.I. e $w \notin [v_1, \dots, v_k]$
$\Rightarrow$ $v_1, \dots, v_k, w$ são L.I.

$\boxed{\text{Verdadeiro}}$

Suponha que $v_1, \dots, v_k, w$ sejam L.D.

então existe $a_1, \dots, a_k, b$ com $a_i \neq 0$ para algum i ou $b \neq 0$
tais que

$$a_1 v_1 + \dots a_k v_k + b w = 0$$

Note que necessariamente $b \neq 0$, pois caso contrário
teríamos que $a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0$ com algum $a_i = 0$
o que é impossível pois $v_1, \dots, v_k$ são L.I.

Segue então que

$$w = -\frac{a_1}{b} v_1 - \frac{a_2}{b} v_2 - \dots - \frac{a_k}{b} v_k$$

que contradiz o fato de $w \notin [v_1, \dots, v_k]$

logo $v_1, \dots, v_k, w$ são L.I. $\blacksquare$

Questão 2 Em $\mathbb{R}^4$

$v_1 = (1,-2,-1,1)$, $v_2 = (-1,1,1,0)$, $v_3 = (-1,-1,1,2)$

$A = \{v_1, v_2, v_3\}$, $S = [A]$

a) Base de S cujos elementos pertencem à A:

Note que v_1, v_2 são L.I. pois v_2 não pode ser múltiplo de v_1

$\Rightarrow$ $\dim S$ só pode ser 2 ou 3

Vamos ver se v_1, v_2, v_3 são L.I. ou L.D.

Suponha que $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0 \iff$

$$\begin{cases} a-b-c=0 \\ -2a+b-c=0 \\ -a+b+c=0 \\ a+2c=0 \end{cases}$$

Matriz do sistema
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Escalonando:

$$\xrightarrow[\substack{L_3 \to L_3+L_1 \\ L_4 \to L_4 - L_1}]{L_2 \to L_2 + 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 + L_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo $a = -2c$
$b = -3c$
c é arbitrário

sistema Indeterminado $\Rightarrow$ v_1, v_2, v_3 L.D.

$\boxed{v_3 = 2v_1 + 3v_2}$

Resposta: $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ é base de $[A]$

(b) Completar a base B para uma base de $\mathbb{R}^4$:

$S = [v_1, v_2] = \{(a-b, -2a+b, -a+b, a) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

Note que se $(x,y,z,w) \in S$ então

$x = -z$

logo, $u_1 = (1,0,0,0) \notin S \Rightarrow v_1, v_2, u_1$ são L.I.

Seja $S_1 = [v_1, v_2, u_1] = \{(a-b+c, -2a+b, -a+b, a) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$

Note que se $(x,y,z,w) \in S_1 \Rightarrow z - w = y$

Logo, $u_2 = (0,1,0,0) \notin S_1 \Rightarrow v_1, v_2, u_1, u_2$ são L.I.

como $\dim \mathbb{R}^4 = 4 \Rightarrow B' = (v_1, v_2, u_1, u_2)$ é base de $\mathbb{R}^4$

<u>Questão 3</u> $V = P_2(\mathbb{R})$, $S_1 = \{p(t) \in P_2(\mathbb{R}) \mid p(1) = 0\}$

$S_2 = \{p(t) \in P_2(\mathbb{R}) \mid p(-1) = 0\}$

a) Base e dimensão de $S_1 \cap S_2$:

$S_1 \cap S_2 = \{p(t) \in P_2(\mathbb{R}) \mid p(1) = 0 \text{ e } p(-1) = 0\}$

Logo $p(t) = a + bt + ct^2 \in S_1 \cap S_2 \iff$

$$\begin{cases} a+b+c = 0 \\ a-b+c = 0 \end{cases} \iff b = 0 \text{ e } c = -a$$

$\Rightarrow S_1 \cap S_2 = \{a - at^2 \mid a \in \mathbb{R}\} = \{a(1-t^2) \mid a \in \mathbb{R}\}$

Base: $\boxed{B = (1-t^2), \quad \dim S_1 \cap S_2 = 1}$

b) Mostre que todo $p \in P_2(\mathbb{R})$ pode ser escrito como $p = q_1 + q_2$ com $q_1 \in S_1$, $q_2 \in S_2$

Vou mostrar que $P_2(\mathbb{R}) = S_1 + S_2$

Como $S_1 + S_2 \subset P_2(\mathbb{R})$ é um subespaço, basta mostrar que $\dim(S_1+S_2) = \dim P_2(\mathbb{R}) = 3$

Mas $\dim(S_1+S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2)$

$$= \dim S_1 + \dim S_2 - 1$$

e $\dim S_1 = 2$ Base: $((1-t), (1-t^2))$

$\dim S_2 = 2$ Base: $(1+t, (1-t^2))$

$\Rightarrow \dim(S_1+S_2) = 2+2-1 = 3$ ∎

c) A decomposição é única?

Não, pois a soma não é direta $(S_1 \cap S_2 = [1-t^2] \neq \{0\})$

Contra-exemplo

$(1-t) + (1-t^2) + (1+t) = p(t)$

Seja $p(t) = 3 - t^2$

$\Rightarrow p(t) = q_1(t) + q_2(t)$ com $q_1(t) = 2 - t - t^2 \in S_1$
$q_2(t) = 1 + t \in S_2$

e

$p(t) = \tilde{q}_1(t) + \tilde{q}_2(t)$ com $\tilde{q}_1(t) = (1-t) \in S_1$
$\tilde{q}_2(t) = 2 + t - t^2 \in S_2$

Questão 4 :

$$T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a+d & a+b+c \\ b+c+d & a \end{pmatrix}$$

a) Base e dimensão de $N(T)$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in N(T) \iff \begin{cases} a+d=0 \\ a+b+c=0 \\ b+c+d=0 \\ a=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a=0 \\ d=0 \\ b+c=0 \end{cases} \iff a=0,\ d=0,\ c=-b$$

Logo $N(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \middle| \ b \in \mathbb{R} \right\}$

base : $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$, $\dim N(T) = 1$

b) Determine $m \in \mathbb{R}$ tal que

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 \\ -1 & m \end{pmatrix} \in \operatorname{Im}(T)$$

$A \in \operatorname{Im}(T) \iff \begin{cases} a+d=m \\ a+b+c=1 \\ b+c+d=-1 \\ a=m \end{cases}$ admite solução

$a=m \Rightarrow d=0$

$\Rightarrow \begin{cases} m+b+c=1 \\ b+c=-1 \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{m=2}$ ∎