MAT105 - Geometria Analítica – Lista 6

Nesta lista de exercícios todas as retas e planos são retas e planos em $\mathbb{R}^3$. Todas as coordenadas são consideradas com respeito as coordenadas canônicas em $\mathbb{R}^3$.

1. Seja $r \subset \mathbb{R}^3$ a reta descrita pela equação

$$r : \frac{x-3}{2} = 1 - y = \frac{2z-1}{3}.$$

   Encontre a distância do ponto $P = (0, 1, -1)$ a reta r.

2. Seja $\pi \subset \mathbb{R}^3$ o plano descrito pela equação vetorial

$$\pi : X = (2, -1, 0) + \alpha(1, 1, 1) + \beta(-2, 0, -2), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

   Determine a distância do ponto $P = (0, 0, 0)$ ao plano π.

3. Considere os seguintes planos em $\mathbb{R}^3$:

$$\pi_1 : x - y + z - 1 = 0$$

$$\pi_2 : X = (1, -1, 1) + \alpha(1, 2, 1) + \beta(1, 1, 0), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\pi_3 : X = (1, 1, 2) + \lambda(1, 0, -1) + \mu(2, 1, -1), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\pi_4 : x + y + z - 2 = 0$$

$$\pi_5 : 2x - 2y + 2z - 6 = 0.$$

   Para cada i, j determine a posição relativa entre os planos π_i e π_j. Determine a distância entre os planos. Caso os planos sejam transversais, encontre uma equação vetorial da reta $\pi_i \cap \pi_j$ e o ângulo entre os planos.

4. Considere as seguintes retas em $\mathbb{R}^3$:

$$r_1 : \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x + 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$r_2 : X = (1, 0, 2) + \alpha(3, -2, 1), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$r_3 : x - 1 = \frac{y+2}{2} = \frac{2-z}{3}$$

$$r_4 : (1, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) + \beta(1, 0, 3), \quad \beta \in \mathbb{R}$$

Para cada i, j determine a posição relativa entre as retas r_i e r_j. Determine a distância entre as retas. Caso as retas sejam concorrentes, encontre as coordenadas do ponto $r_i \cap r_j$ e o ângulo entre as retas.

5. Seja $\pi \subset \mathbb{R}^3$ o plano
$$\pi : x - y = 0.$$
Para cada uma das retas abaixo, determine sua posição relativa ao plano π. Calcule a distância ao plano e caso a reta seja transversal ao plano determine as coordenadas do ponto de intersecção e o ângulo entre a reta e o plano.

$$r_1 : \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x - y - 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

$$r_2 : X = (1, 0, -1) + \alpha(2, 2, -7), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$r_3 : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 0 \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

6. Um paralelogramo de vértices A, B, C, D tem lados AB e CD paralelos à reta de equação $r : X = (0, 0, 0) + \lambda(3, 4, 5)$ e os outros dois paralelos ao plano $\pi : x + y + 3z = 0$. Sabendo que $A = (0, 0, 0)$ e $D = (1, 1, 1)$, determine os vrtices B e C.

7. Obtenha uma equação vetorial para as retas (caso existam) que passam pelo ponto P , são paralelas ao plano π e são concorrentes com a reta r nos seguintes casos. Interprete geometricamente a existência ou não de tal reta:
   (a) $P = (1, 1, 0)$, $\pi : 2x + y - z - 3 = 0$, $r : X = (1, 0, 0) + \lambda(-1, 0, 1)$.
   (b) $P = (1, 0, 1)$, $\pi : x - 3y - z = 1$, $r : X = (0, 0, 0) + \lambda(2, 1, -1)$.
   (c) $P = (1, 2, 1)$, $\pi : x - y = 0$, $r : X = (1, 0, 0) + \lambda(2, 2, 1)$.

8. Sejam $P_1 = (1, 0 - 1)$ e $P_2 = (0, 1, 1)$ dois pontos de $\mathbb{R}^3$. Seja
$$S = \{Q \in \mathbb{R}^3 : d(Q, P_1) = d(Q, P_2)\}.$$
Ou seja, S é o conjunto de todos os pontos de $\mathbb{R}^3$ que estão equidistantes aos pontos P_1 e P_2.

(a) Mostre que S é um plano perpendicular à reta que passa por P_1 e P_2.

(b) Mostre que S intersecta a reta que passa por P_1 e P_2 no ponto médio do segmento P_1P_2.

(c) Encontre uma equação vetorial e uma equação geral para o plano S.

9. Determine uma equação paramétrica da reta que passa pelo ponto $P = (1, -2, -1)$ e intercepta as retas reversas

$$r : \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2z - 3 \end{cases} \quad \text{e } s : \begin{cases} x = z - 2 \\ y = -z + 1 \end{cases}$$

10. Sejam $P = (4, 1, -1)$ e $r : X = (2, 4, 1) + \lambda(1, -1, 2)$.
    (a) Mostre que $P \notin r$.
    (b) Obtenha uma equação geral do plano que contém r e P.

11. Considere os planos $\pi_1 : 2x = 1$, $\pi_2 : x = 0$, $\pi_3 : z = 0$ e seja π_4 o plano que contém as retas

$$r : X = (1, 2, 0) + \lambda(1, 2, -1) \text{ e } s : \begin{cases} x = 0 \\ z + y = 1 \end{cases}$$

Verique que se esses planos determinam um tetraedro e calcule o seu volume.

12. Considere as retas r e s dadas por:

$$r : X = (1, 0, 1) + \lambda(1, 1, 1) \quad s : X = (1, 1, 1) + \mu(1, 0, -1).$$

    (a) Mostre que r e s são reversas
    (b) Calcule a distância entre as restas r e s.
    (c) Encontre todas as retas que são concorrentes a r e s e são perpendiculares a ambas as retas.
    (d) Encontre pontos $P \in r$ e $Q \in s$ tais que $d(r, s) = d(P, Q)$.

13. Duas partículas movimentam-se de acordo com as seguintes equações:

$$X = (-m, m, 0) + t(1, -1, 1), \quad X = (-1, 1, -2) + t(1, -1, 2),$$

onde t indica o tempo.

    (a) Determine (caso existam) todos os valores de m para os quais as trajetórias não se cruzam
    (b) Determine (caso existam) todos os valores de m para os quais as partículas colidem. Nesses casos determine o momento da colisão.