MAT105 - Geometria Analítica – Lista 4

1. Sejam O, A, B, C pontos de R^3 que são vértices de um tetraedro regular cujas arestas têm comprimento 2. Considere a base $\mathcal{E} = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ de V^3 e sejam

$$\vec{u} = (-1, 2, -1)_{\mathcal{E}}, \quad \vec{v} = (1, 1, -1)_{\mathcal{E}}.$$

   (a) Calcule $||\vec{u}||$, $||\vec{v}||$, e $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

   (b) Determine o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

   (c) Determine $\mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$ e $\mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$.

2. Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vetores não nulos de V^3 que são mutuamente ortogonais, isto é, tais que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w} = 0.$$

   Mostre que $\mathcal{E} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma base de V^3. (DICA: Considere a equação $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w} = \vec{0}$. Faça o produto escalar dos dois lados dessa equação com $\vec{u}$ para concluir que $a = 0$. Repita o argumento com $\vec{v}$ e $\vec{w}$ no lugar de $\vec{u}$.)

3. O objetivo deste exercício é explicar o método de ortonormalização de Gram-Schmidt. Este é um método que serve para construir uma base ortonormal a partir de uma base qualquer.

   Seja $\mathcal{E} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ uma base de V^3. considere os seguintes vetores:

$$\vec{a} = \frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}, \quad \vec{b} = \frac{\vec{v} - \mathrm{proj}_{\vec{a}}\vec{v}}{||\vec{v} - \mathrm{proj}_{\vec{a}}\vec{v}||}, \quad \vec{c} = \frac{\vec{w} - \mathrm{proj}_{\vec{a}}\vec{w} - \mathrm{proj}_{\vec{b}}\vec{w}}{||\vec{w} - \mathrm{proj}_{\vec{a}}\vec{w} - \mathrm{proj}_{\vec{b}}\vec{w}||}$$

   Mostre que $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ é uma base ortonormal de V^3.

4. Seja $\mathcal{E}$ a base do exercício 1 e sejam

$$\vec{u} = (-1, 2, -1)_{\mathcal{E}}, \quad \vec{v} = (1, 1, -1)_{\mathcal{E}}, \quad \vec{w} = (1, 0, 0)_{\mathcal{E}}.$$

   Aplique o método descrito no exercício 3 acima para obter uma base ortonormal a partir da base $\mathcal{F} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de V^3.

5. Na figura 1 abaixo temos um cubo de aresta 1. Seja M um ponto na aresta CG tal que a distância de C a M é quatro vezes a distância de G a M e seja N o ponto médio da aresta DH.

   (a) Calcule o ângulo entre $\overrightarrow{EM}$ e $\overrightarrow{AN}$.

   (b) Encontre a projeção ortogonal de $\overrightarrow{EM}$ em $\overrightarrow{EG}$.

6. Seja $\mathcal{E}$ uma base ortonormal de V^3 e $\vec{u} = (1, -1, 1)_{\mathcal{E}}$.

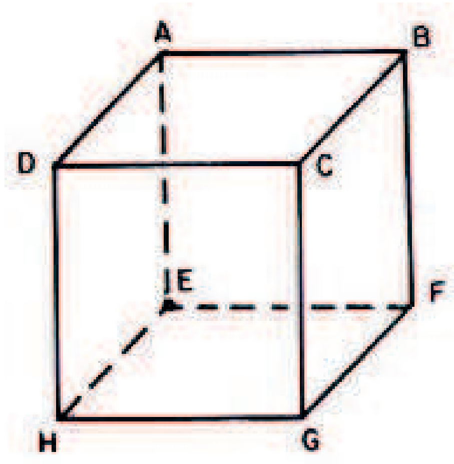

Figura 1: Cubo

(a) Determine o conjunto de todos os valores $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{v} = (a, b, c)_{\mathcal{E}}$ é perpendicular a $\vec{u}$.

(b) Explique geometricamente o motivo pelo qual a resposta do item acima depende de dois parâmetros.

7. Decida se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta.

   (a) Se $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$, então $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$ são ortogonais.

   (b) Se $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$ são ortogonais, então $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

   (c) Se $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é l.d., então $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é l.d.

   (d) Se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é l.d., então $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é l.d.

8. Seja $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base de V^3. Para cada um dos conjuntos $\mathcal{F}$ abaixo, mostre que $\mathcal{F}$ é uma base de V^3 e determine se as bases $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ têm as mesmas orientações, ou se têm orientações opostas:

   (a) $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$

   (b) $\mathcal{F} = (\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1)$

   (c) $\mathcal{F} = (\vec{e}_3, \vec{e}_2 + \vec{e}_1, \vec{e}_1 - \vec{e}_3)$

9. Fixe uma orientação em V^3 e sejam $\vec{u}, \vec{v}$ vetores linearmente independentes. Determine se as seguintes bases de V^3 têm orientação positivas ou negativas:

   (a) $E = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{v} \wedge \vec{u})$

   (b) $E = (\vec{v}, \vec{v} \wedge \vec{u}, \vec{u})$

   (c) $E = ((\vec{v} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{u}, \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{u})$

   (d) $E = (2\vec{u} - \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} - \vec{u} \wedge \vec{v}, (\vec{u} - 3\vec{v}) \wedge (2\vec{u} + \vec{v}))$

(e) $E = (\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{u}, (\vec{u} + 2\vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v}) + \vec{v})$

10. Seja $\mathcal{E}$ uma base de V^3 e sejam

$$\vec{u} = (1, a, 1), \quad \vec{v} = (0, a, 1), \quad \vec{u} = (-1, a, 1).$$

Determine todos os valores de $a \in \mathbb{R}$ para os quais $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma base de V^3.

11. Sabendo que a área do paralelograma gerado por $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é 1, calcule o volume do paralelepípedo gerado pelos vetores $\vec{v} - \vec{w}, \vec{v} + 2\vec{w}$, e $(\vec{v} + \vec{w}) \wedge (\vec{v} - \vec{w})$.

12. Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal positiva de V^3 e seja $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ onde

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{f}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{f}_3 = \vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

(a) Determine todos os vetores $\vec{u}$ de comprimento $\sqrt{24}$ ortogonais a $\vec{f}_1$ e $\vec{f}_2$.

(b) Decida para quais valores de λ temos que F **NÃO** é uma base.

(c) Determine todos os valores de λ para os quais $||\vec{f}_3|| = \sqrt{6}$ e F é uma base com a mesma orientação de E.

(d) Determine as coordenadas de $\vec{v} = (1, 1, 1)_E$ na base F quando $\lambda = 1$.

(e) Calcule o volume do paralelepipedo gerado por $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ quando $\lambda = 0$.