MAT105 - Geometria Analítica – Lista 1

1. Consider os seguintes pontos de $\mathbb{R}^3$: $A = (1, -1, 2)$, $B = (2, 1, 1)$, $C = (-2, -4, -1)$, $D = (2, -3, 1)$, $P = (1, 2, 1)$. Considere o vetor
$$\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CD}.$$
Determine as coordenadas do ponto $Q \in \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$

2. Sejam $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$ vetores em $\mathbb{R}^3$ (poderia ser $\mathbb{R}^n$ que não muda em nada a resolução do problema!). Suponha que as seguintes equações são satisfeitas:
$$\begin{cases} \vec{u}_1 + 2\vec{u}_3 = \vec{a} \\ \vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = \vec{b} \\ \vec{u}_2 + 2\vec{u}_3 = \vec{c} \end{cases}$$
Descreva $\vec{u}_1, \vec{u}_2$, e $\vec{u}_3$ como combinação linear de $\vec{a}, \vec{b}$, e $\vec{c}$.
(OBSERVAÇÃO: Dizemos que um vetor $\vec{w}$ é **combinação linear** de $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ se
$$\vec{w} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c},$$
onde α, β, γ são números reais. Ou seja, no exercício acima você deve expressar cada $\vec{u}_i$ como uma soma de múltplos reais $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.)

3. Na figura 1 abaixo temos um cubo onde todas as arestas tem comprimento 1. Decida se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique suas respostas:
   (a) $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{BC}$
   (b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EH} - \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{FG}$

4. Considere o cubo desenhado na figura 1. Seja P um ponto da aresta HG tal que $\overrightarrow{HP} = 2\overrightarrow{PG}$. Descreva o vetor $\overrightarrow{BP}$ como combinação linear de $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AF}$.

5. Sejam A, B, C os vértices de um triângulo. Seja P um ponto no seguimento BC tal que a distância de B até P é 3 vezes a distância de C até P. Escreva o vetor $\overrightarrow{AP}$ como combinação linear de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

6. Considere o triângulo em $\mathbb{R}^3$ cujos vértices têm coordenadas:
$$A = (1, -1, 0), B = (1, 0, 1), C = (2, -1, 1).$$
Sejam M o ponto médio da aresta AB, N o ponto médio da aresta BC e O o ponto médio da aresta AC. O **baricentro** do triângulo ABC é ponto de interseção dos seguimentos CM, AN e BO.

   Encontre as coordenadas do baricentro do triângulo ABC.

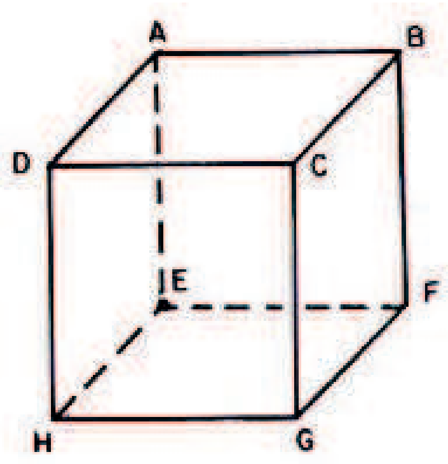

Figura 1: Cubo de aresta 1

7. Sejam A, B e C vértices de um triângulo, e seja M o ponto médio do segmento AB (ou seja, a distância de A até M é igual a distância de B até M), e N o ponto médio do segmento AC.
   (a) Mostre que $\overrightarrow{BC}$ é paralelo à $\overrightarrow{MN}$
   (b) Se $l = ||\overrightarrow{BC}||$ denota a norma (comprimento) do vetor $\overrightarrow{BC}$, e $d = ||\overrightarrow{MN}||$, encontre valor da razão $r = l/d$.
   (c) Seja P o ponto médio do segmento MN, e $\vec{u} = \overrightarrow{AP}$. Encontre α tal que o ponto $X = A + \alpha\vec{u}$ esteja na reta que liga os pontos B e C (faça um desenho antes de começar!).

8. Considere os seguintes vetores dados em termos de suas coordenadas na base canônica de $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{u}_1 = (0,0,0), \quad \vec{u}_2 = (-1,0,2), \quad \vec{u}_3 = (-1,1,2), \quad \vec{u}_4 = (0,1,0), \quad \vec{u}_5 = (1,1,1).$$

   Determine se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta com uma demonstração ou um contra-exemplo:
   (a) $\vec{u}_1$ pode ser escrito de infinitas formas diferentes como combinação linear de $\vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$.
   (b) O conjunto $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ é linearmente independente.
   (c) O conjunto $\{\vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ é linearmente independente.
   (d) O conjunto $\{\vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_5\}$ é linearmente independente.
   (e) O conjunto $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ é linearmente independente.
   (f) $B = (\vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)$ é uma base de V^3.

9. Seja $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ uma base de V^3. Sejam

$$\vec{u} = (1, 0, -2)_F, \quad \vec{v} = (1, 1, 0)_F, \quad \vec{w} = (0, -1, -1)_F.$$

   (a) Mostre que $B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma base de V^3
   (b) Se $\vec{a} = (1, 2, 3)_B$, encontre as coordenadas de $\vec{a}$ na base F.
   (c) Se $\vec{b} = (1, 2, 3)_F$, encontre as coordenadas de $\vec{b}$ na base B.

10. Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base de V^3 e sejam

$$\vec{f}_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_3, \quad \vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \quad \vec{f}_3 = -\vec{e}_1 - \vec{e}_3.$$

   (a) Quais são as coordenadas dos vetores $\vec{f}_1, \vec{f}_2$, e $\vec{f}_3$ na base E?
   (b) Mostre que $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ é uma base de V^3.
   (c) Se as coordenadas de um vetor $\vec{v}$ na base E são dadas por $\vec{v} = (2, 1, 0)_E$, encontre as coordenadas de $\vec{v}$ na base F.