Gabarito P1

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMATICA E ESTATISTICA

Nome___ Nº. USP___
Curso___ Período___
Disciplina___ Código___

Data__/__/__ Nota___(___) Pág___

1) $\vec{u} = (1, a, 1)$, $\vec{v} = (0, a, 1)$, $\vec{w} = (1, 1, a)$

Sabemos que $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma base de V^3 se e somente se são linearmente independentes

$\Leftrightarrow$ O determinante da matriz do sistema

$$x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$$

é $\neq 0$

Logo, $\mathcal{B}$ é uma base

$$\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \neq 0$$

Mas

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} = a^2 + a - a - 1 = a^2 - 1$$

Logo, $\mathcal{B}$ é base $\Leftrightarrow$ $\boxed{a \neq \pm 1}$

2) a) Verdadeira:

Sejam $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ com $a_i \neq 0$ para algum $i \in \{1, \ldots, k\}$ tais que

$$a_1 \vec{v}_1 + \cdots + a_k \vec{v}_k = 0$$

$$\Rightarrow a_1 \vec{v}_1 + \cdots + a_k \vec{v}_k + 0\vec{u} = 0 \quad \text{com algum } a_i \neq 0$$

$\Rightarrow$ $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k, \vec{u}$ são L.D.

b) Verdadeira:

Usando o item (a) demonstrado acima, se $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{k-1}$ fosse L.D. então $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{k-1}, \vec{v}_k$ também seria L.D. o que contradiz a hipótese de $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ ser L.I.

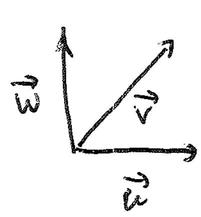
c) Falso:

$B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ é base se e somente se $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ são L.I.

Por exemplo, se $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (2, 0, 0)$, $\vec{v}_3 = (3, 0, 0)$ então B não é uma base

d) Falso:

Contra-Exemplo:



São L.D.; $\vec{u}, \vec{v}$ são L.I. mas também $\vec{v}, \vec{w}$ e $\vec{u}, \vec{w}$ são L.I.

Por exemplo: $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$, $\vec{w} = (0, 1, 0)$

3) $$\circledast \begin{cases} x \quad\quad + 2z = 1 \\ x - ay + z = -1 \\ y \quad\quad + 2z = b \end{cases}$$

a) determinar a, b tal que $\circledast$ é S.P.D :

Matriz do sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -a & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\circledast$ é S.P.D. $\iff$ $\det A \neq 0$

$\det A = -2a + 2 - 1 = 1 - 2a$

Logo $\circledast$ é S.P.D. $\iff$ $a \neq 1/2$ e $b \in \mathbb{R}$ é qualquer número real

b) a, b tal que $\circledast$ é S.I :

Vou escalonar a matriz aumentada do sistema quando $a = 1/2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1/2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & b \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1/2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & b \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \to -2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & b-4 \end{array}\right)$$

Logo $\circledast$ é SI $\iff$ $\boxed{\begin{matrix} b \neq 4 \\ a = 1/2 \end{matrix}}$

c) Se $a = 1/2$ e $b = 4$

(Aproveitando o escalonamento do item (b))

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ é a matriz aumentada de ⊛ na forma escalonada reduzida

Logo o sistema ⊛ é equivalente ao sistema

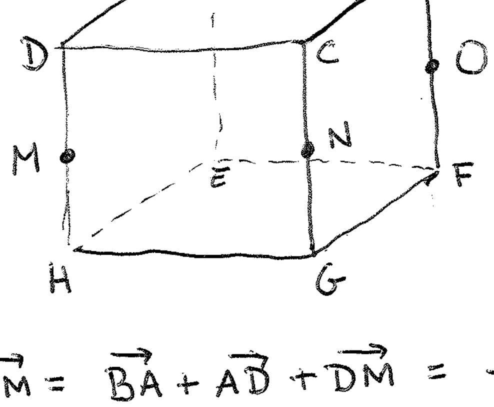
$$\begin{cases} x \quad\quad + 2z = 1 \\ \quad y + 2z = 4 \\ \quad 0 \quad\quad = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $x = 1 - 2z$
$y = 4 - 2z$
z é arbitrário

$\Rightarrow$ Na forma vetorial $(z = \lambda)$

$$\boxed{\begin{gathered}(x,y,z) = (1,4,0) + \lambda(-2,-2,1) \\ \lambda \in \mathbb{R}\end{gathered}}$$

4)



$\mathcal{B} = (\vec{EH}, \vec{EF}, \vec{EA})$

a) $\vec{BM} = \vec{BA} + \vec{AD} + \vec{DM} = -\vec{EF} + \vec{EH} - \frac{1}{2}\vec{AE} = \vec{EH} - \vec{EF} - \frac{1}{2}\vec{EA}$

$= \left(1, -1, \frac{-1}{2}\right)_{\mathcal{B}}$

- $\vec{FN} = \vec{FG} + \vec{GN} = \vec{EH} + \frac{1}{2}\vec{EA} = \left(1, 0, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}}$

- $\vec{AO} = \vec{AB} + \vec{BO} = \vec{EF} - \frac{1}{2}\vec{EA} = \left(0, 1, -\frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}}$

b) Calculamos

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2} \neq 0$$

Como o determinante é $\neq 0$, $\mathcal{E}$ é uma base

c) Temos $\vec{u} = -3\vec{EH} + 6\vec{EF} - \frac{3}{2}\vec{EA} = \left(-3, 6, -\frac{3}{2}\right)_{\mathcal{B}}$

e queremos encontrar $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{u} = a\vec{BM} + b\vec{FN} + c\vec{AO} =$$

$$= a\left(1, -1, -\frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}} + b\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}} + c\left(0, 1, -\frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}}$$

Logo, temos que resolver a equação

$$\left(a+b, -a+c, -\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{c}{2}\right)_{\mathcal{B}} = \left(-3, 6, -\frac{3}{2}\right)_{\mathcal{B}}$$

ou seja

$$\begin{cases} a + b = -3 \\ -a + c = 6 \\ -\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{c}{2} = -\frac{3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = -3 \\ -a + c = 6 \\ -a + b - c = -3 \end{cases}$$

Matriz Aumentada do Sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 + L_1]{L_2 \to L_2 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 - 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to -\frac{1}{3} L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{l} a = -2 \\ b = -1 \\ c = 4 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{u} = (-2, -1, 4)_{\mathcal{E}}}$$