

1. Considere os seguintes pontos de \mathbb{R}^3 : $A = (1, -1, 2)$, $B = (2, 1, 1)$, $C = (-2, -4, -1)$, $D = (2, -3, 1)$, $P = (1, 2, 1)$. Considere o vetor

$$\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CD}.$$

Determine as coordenadas do ponto $Q \in \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$

2. Sejam $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ vetores em \mathbb{R}^3 (poderia ser \mathbb{R}^n que não muda em nada a resolução do problema!). Suponha que as seguintes equações são satisfeitas:

$$\begin{cases} \vec{u}_1 + 2\vec{u}_3 = \vec{a} \\ \vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = \vec{b} \\ \vec{u}_2 + 2\vec{u}_3 = \vec{c} \end{cases}$$

Descreva \vec{u}_1, \vec{u}_2 , e \vec{u}_3 como combinação linear de \vec{a}, \vec{b} , e \vec{c} .

(OBSERVAÇÃO: Dizemos que um vetor \vec{w} é **combinação linear** de $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ se

$$\vec{w} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c},$$

onde α, β, γ são números reais. Ou seja, no exercício acima você deve expressar cada \vec{u}_i como uma soma de múltiplos reais $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.)

3. Na figura 1 abaixo temos um cubo onde todas as arestas tem comprimento 1. Decida se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique suas respostas:

(a) $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{BC}$

(b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EH} - \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{FG}$

4. Considere o cubo desenhado na figura 1. Seja P um ponto da aresta HG tal que $\overrightarrow{HP} = 2\overrightarrow{PG}$. Descreva o vetor \overrightarrow{BP} como combinação linear de $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AF}$.

5. Sejam A, B, C os vértices de um triângulo. Seja P um ponto no seguimento BC tal que a distância de B até P é 3 vezes a distância de C até P . Escreva o vetor \overrightarrow{AP} como combinação linear de \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} .

6. Considere o triângulo em \mathbb{R}^3 cujos vértices têm coordenadas:

$$A = (1, -1, 0), B = (1, 0, 1), C = (2, -1, 1).$$

Sejam M o ponto médio da aresta AB , N o ponto médio da aresta BC e O o ponto médio da aresta AC . O **baricentro** do triângulo ABC é ponto de interseção dos seguimentos CM, AN e BO .

Encontre as coordenadas do baricentro do triângulo ABC .

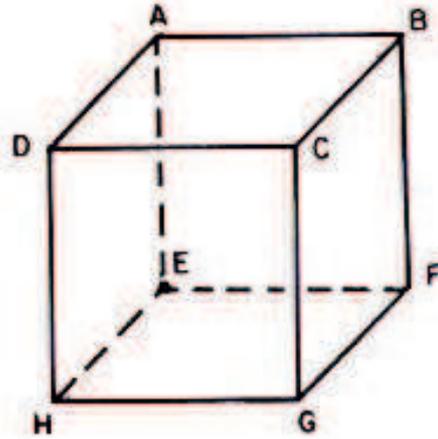


Figura 1: Cubo de aresta 1

7. Sejam A, B e C vértices de um triângulo, e seja M o ponto médio do segmento AB (ou seja, a distância de A até M é igual a distância de B até M), e N o ponto médio do segmento AC .
- Mostre que \overrightarrow{BC} é paralelo à \overrightarrow{MN}
 - Se $l = \|\overrightarrow{BC}\|$ denota a norma (comprimento) do vetor \overrightarrow{BC} , e $d = \|\overrightarrow{MN}\|$, encontre valor da razão $r = l/d$.
 - Seja P o ponto médio do segmento MN , e $\vec{u} = \overrightarrow{AP}$. Encontre α tal que o ponto $X = A + \alpha\vec{u}$ esteja na reta que liga os pontos B e C (faça um desenho antes de começar!).
8. Sejam A, B e C vértices de um triângulo, e seja M o ponto do segmento AB cuja distância at A é o triplo da distância até B , e N o ponto do segmento AC cuja distância at A é o dobro da distância até C .
- Seja P o ponto médio do segmento MN , e $\vec{u} = \overrightarrow{AP}$. Encontre α tal que o ponto $X = A + \alpha\vec{u}$ esteja na reta que liga os pontos B e C (faça um desenho antes de começar!).
9. Considere os seguintes vetores dados em termos de suas coordenadas na base canônica de \mathbb{R}^3 :

$$\vec{u}_1 = (0, 0, 0), \quad \vec{u}_2 = (-1, 0, 2), \quad \vec{u}_3 = (-1, 1, 2), \quad \vec{u}_4 = (0, 1, 0), \quad \vec{u}_5 = (1, 1, 1).$$

Determine se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta com uma demonstração ou um contra-exemplo:

- \vec{u}_1 pode ser escrito de infinitas formas diferentes como combinação linear de $\vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$.
- O conjunto $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ é linearmente independente.

- (c) O conjunto $\{\vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ é linearmente independente.
- (d) O conjunto $\{\vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_5\}$ é linearmente independente.
- (e) O conjunto $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ é linearmente independente.
- (f) $B = (\vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)$ é uma base de V^3 .

10. Seja $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ uma base de V^3 . Sejam

$$\vec{u} = (1, 0, -2)_F, \quad \vec{v} = (1, 1, 0)_F, \quad \vec{w} = (0, -1, -1)_F.$$

- (a) Mostre que $B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma base de V^3
- (b) Se $\vec{a} = (1, 2, 3)_B$, encontre as coordenadas de \vec{a} na base F .
- (c) Se $\vec{b} = (1, 2, 3)_F$, encontre as coordenadas de \vec{b} na base B .

11. Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base de V^3 e sejam

$$\vec{f}_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_3, \quad \vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \quad \vec{f}_3 = -\vec{e}_1 - \vec{e}_3.$$

- (a) Quais são as coordenadas dos vetores \vec{f}_1, \vec{f}_2 , e \vec{f}_3 na base E ?
- (b) Mostre que $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ é uma base de V^3 .
- (c) Se as coordenadas de um vetor \vec{v} na base E são dadas por $\vec{v} = (2, 1, 0)_E$, encontre as coordenadas de \vec{v} na base F .