Resolução da Lista 1

① $A=(1,-1,2)$, $B=(2,1,1)$, $C=(-2,-4,-1)$, $D=(2,-3,1)$,
$P=(1,2,1)$, $Q=(q_1,q_2,q_3)$

$$\vec{u} = 3\vec{AB} - 2\vec{CD}$$

Encontrar Q tal que $\vec{u} = \vec{PQ}$

$\vec{AB} = (1,2,-1)$, $3\vec{AB} = (3,6,-3)$

$\vec{CD} = (4,1,2)$, $2\vec{CD} = (8,2,4)$

$$\vec{u} = 3\vec{AB} - 2\vec{CD} = (-5,4,-7)$$

$$\vec{u} = \vec{PQ} = (q_1-1,\ q_2-2,\ q_3-1) \Rightarrow q_1=-4,\ q_2=6,\ q_3=-6$$

$$\boxed{Q=(-4,6,-6)}$$

② $$\begin{cases} \vec{v}_1 + 2\vec{u}_3 = \vec{a} & (1) \\ \vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = \vec{b} & (2) \\ \vec{u}_2 + 2\vec{u}_3 = \vec{c} & (3) \end{cases}$$

Expressar $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ como combinação linear de $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$(1) \Rightarrow \vec{u}_1 = \vec{a} - 2\vec{u}_3$

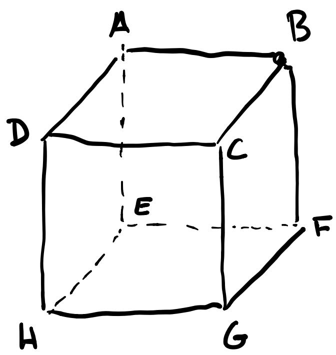
$(2) \Rightarrow \vec{a} - 2\vec{u}_3 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = \vec{b} \Rightarrow \vec{u}_2 = \vec{a} - \vec{b} - \vec{u}_3$

$(3) \Rightarrow \vec{a} - \vec{b} - \vec{u}_3 = \vec{c} \Rightarrow \vec{u}_3 = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$

Logo, substituindo, obtemos

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \vec{a} - 2(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}) = -\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c} \\ \vec{u}_2 &= \vec{a} - \vec{b} - (\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}) = \vec{c} \\ \vec{u}_3 &= \vec{a} - \vec{b} - \vec{c} \end{aligned}}$$

③



a) $\vec{AG} + \vec{HE} + \vec{FD} = \vec{BC}$?

$\vec{HE} = \vec{GF} \Rightarrow \vec{AG} + \vec{HE} = \vec{AG} + \vec{GF} = \vec{AF}$

$\Rightarrow \vec{AG} + \vec{HE} + \vec{FD} = \vec{AF} + \vec{FD} = \vec{AD}$

Mas $\vec{AD} = \vec{BC}$ e portanto é verdade

b) $\vec{AB} + \vec{EH} - \vec{EB} + \vec{DB} = \vec{FG}$?

Note que $-\vec{EB} = \vec{BE}$.

Logo,

$\vec{AB} - \vec{EB} = \vec{AB} + \vec{BE} = \vec{AE}$

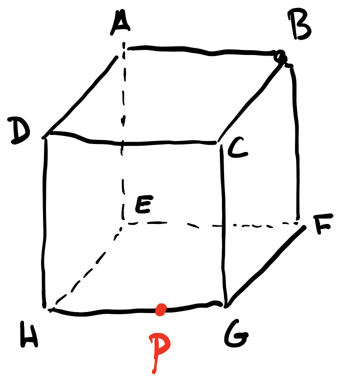
$\Rightarrow \vec{AB} - \vec{EB} + \vec{EH} = \vec{AE} + \vec{EH} = \vec{AH}$

NOTE QUE $\vec{DB} = \vec{HF}$. Logo

$\vec{AB} - \vec{EB} + \vec{EH} + \vec{BE} = \vec{AH} + \vec{HF} = \vec{AF}$

Mas, $\vec{AF} \neq \vec{FG}$ e portanto é FALSO

④



Escrever $\vec{BP}$ como combinação linear de $\vec{AH}$, $\vec{AG}$, $\vec{AF}$

$\vec{HP} = 2\vec{PG}$

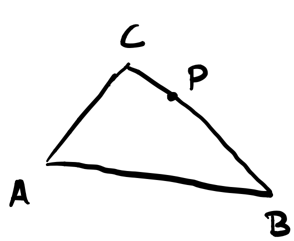
Note que $\boxed{\vec{BP} = \vec{BA} + \vec{AP}}$

- $\vec{AP} = \vec{AH} + \vec{HP}$
- $\vec{HP} + \vec{PG} = \vec{HG} \Rightarrow \vec{HP} + \frac{1}{2}\vec{HP} = \vec{HG} \Rightarrow \frac{3}{2}\vec{HP} = \vec{HG} \Rightarrow \vec{HP} = \frac{2}{3}\vec{HG}$
- $\vec{AH} + \vec{HG} = \vec{AG} \Rightarrow \vec{HG} = \vec{AG} - \vec{AH} \Rightarrow \vec{HP} = \frac{2}{3}\vec{AG} - \frac{2}{3}\vec{AH}$
- $\vec{BA} = -\vec{AB} = -\vec{HG} = -(\vec{AG} - \vec{AH}) = \vec{AH} - \vec{AG}$

Logo, $\vec{BP} = \vec{BA} + \vec{AP} = \vec{AH} - \vec{AG} + \frac{2}{3}\vec{AG} - \frac{2}{3}\vec{AH}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{BP} = \frac{1}{3}\vec{AH} - \frac{1}{3}\vec{AG}}$

⑤



$\vec{BP} = 3\vec{PC}$

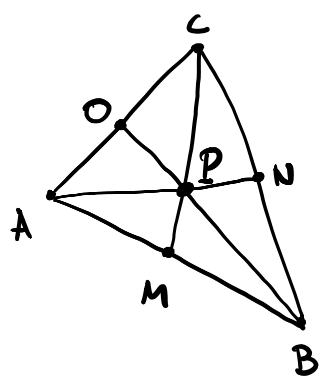
Escrever $\vec{AP}$ como combinação linear de $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$

- $\vec{AP} = \vec{AB} + \vec{BP}$
- $\vec{BP} + \vec{PC} = \vec{BC} \Rightarrow \vec{BP} + \frac{1}{3}\vec{BP} = \vec{BC} \Rightarrow \vec{BP} = \frac{3}{4}\vec{BC}$
- $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \Rightarrow \vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} \Rightarrow \vec{BP} = \frac{3}{4}\vec{AC} - \frac{3}{4}\vec{AB}$

Logo, $\vec{AP} = \vec{AB} + \vec{BP} = \vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC} - \frac{3}{4}\vec{AB}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{AP} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC}}$$

6



P: baricentro do triângulo

$A = (1, -1, 0)$

$B = (1, 0, 1)$

$C = (2, -1, 1)$

Encontrar as coordenadas de P

Vamos primeiro encontrar uma fórmula geral para o vetor $\vec{AP}$ como combinação linear de $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$.

$\vec{AP} = \vec{AM} + \vec{MP} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \alpha\vec{MC}$ onde $\alpha \in \mathbb{R}$ (temos que descobrir)

Note que $\vec{AM} + \vec{MC} = \vec{AC} \Rightarrow \boxed{\vec{MC} = \vec{AC} - \vec{AM} = \vec{AC} - \frac{1}{2}\vec{AB}}$

Analogamente,

$$\vec{AP} = \vec{AO} + \vec{OP} = \frac{1}{2}\vec{AC} + \beta\,\vec{OB} \quad \text{onde} \quad \beta \in \mathbb{R}$$

Note que $\quad \vec{AO} + \vec{OB} = \vec{AB} \Rightarrow \vec{OB} = \vec{AB} - \vec{AO} = \vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC}$

Logo,

$$\vec{AP} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \alpha\left(\vec{AC} - \frac{1}{2}\vec{AB}\right) = \frac{1-\alpha}{2}\vec{AB} + \alpha\vec{AC}$$

$$\vec{AP} = \beta\left(\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC}\right) + \frac{1}{2}\vec{AC} = \beta\vec{AB} + \frac{1-\beta}{2}\vec{AC}$$

Igualando as duas expressões para $\vec{AP}$ temos

$$\frac{1-\alpha}{2}\vec{AB} + \alpha\vec{AC} = \beta\vec{AB} + \frac{1-\beta}{2}\vec{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{1-\alpha-2\beta}{2}\vec{AB} + \frac{2\alpha+\beta-1}{2}\vec{AC} = \vec{0}$$

Como $\{\vec{AB}, \vec{AC}\}$ é L.I. (A, B, C são vértices de um triângulo e portanto $\vec{AB} \nparallel \vec{AC}$), segue que

$$\begin{cases} \dfrac{1-\alpha-2\beta}{2} = 0 \\ \dfrac{2\alpha+\beta-1}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ 2\alpha + \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3},\ \beta = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}}$$

Voltando ao Exercício:

$$\vec{AP} = (p_1 - 1, p_2 + 1, p_3)$$

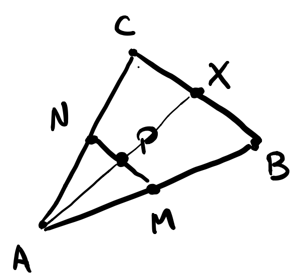
$$\vec{AB} = (0, 1, 1)$$

$$\vec{AC} = (1, 0, 1)$$

$$\Rightarrow (p_1 - 1, p_2 + 1, p_3) = \left(0, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right) + \left(\tfrac{1}{3}, 0, \tfrac{1}{3}\right) = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{P = (p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)}$$

7



a) $\vec{AM} + \vec{MN} = \vec{AN} = \frac{1}{2}\vec{AC}$

$$\Rightarrow \vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{AC} - \vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AC} - \frac{1}{2}\vec{AB}$$

Por outro lado

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \Rightarrow \vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$$

$$\Rightarrow \vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{BC} \Rightarrow \vec{MN} \parallel \vec{BC}$$

b) $$\frac{\|\vec{BC}\|}{\|\vec{MN}\|} = \frac{\|\vec{BC}\|}{\|\frac{1}{2}\vec{BC}\|} = \frac{\|\vec{BC}\|}{\frac{1}{2}\|\vec{BC}\|} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

c) $X = A + \alpha \vec{AP}$

$X = B + \lambda \vec{BC} = A + \vec{AB} + \lambda \vec{BC}$

$\Rightarrow \quad \alpha \vec{AP} = \vec{AB} + \lambda \vec{BC}$

Note que $\vec{AP} = \vec{AM} + \vec{MP} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{AC} - \frac{1}{2}\vec{AB}\right)$

$= \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}$

Logo

$$\frac{\alpha}{4}\vec{AB} + \frac{\alpha}{4}\vec{AC} = \vec{AB} + \lambda\vec{BC}$$

$\Rightarrow \quad \alpha\vec{AB} + \alpha\vec{AC} = 4\vec{AB} + 4\lambda\vec{BC} = 4\vec{AB} + 4\lambda(\vec{AC} - \vec{AB})$

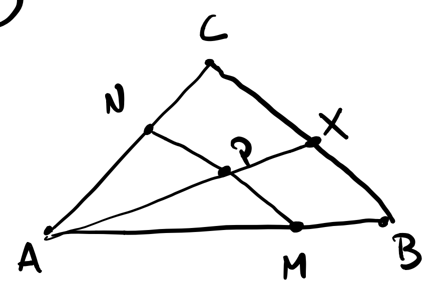
$\Rightarrow \quad \alpha\vec{AB} + \alpha\vec{AC} = 4(1-\lambda)\vec{AB} + 4\lambda\vec{AC}$

$\Rightarrow \quad (\alpha + 4\lambda - 4)\vec{AB} + (\alpha - 4\lambda)\vec{AC} = \vec{0}$

$\Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha + 4\lambda = 4 \\ \alpha - 4\lambda = 0 \end{cases}$ (pois $\{\vec{AB}, \vec{AC}\}$ L.I.)

$\Rightarrow \quad \alpha = 4\lambda, \quad \lambda = \frac{1}{2}, \quad \boxed{\alpha = 2}$ //

8



$\vec{AM} = 3\vec{MB}$

$\vec{AN} = 2\vec{NC}$

$\vec{MP} = \frac{1}{2}\vec{MN}$

Encontre $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $X = A + \alpha\vec{AP}$

$X = A + \alpha\vec{AP}$

$X = A + \vec{AB} + \lambda\vec{BC}$

$\Rightarrow \alpha\vec{AP} = \vec{AB} + \lambda\vec{BC}$ (*)

Vamos escrever $\vec{AP}$ em como combinação linear de $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$:

- $\vec{AP} = \vec{AM} + \vec{MP}$
- $\vec{AM} + \vec{MB} = \vec{AB} \Rightarrow \vec{AM} + \frac{1}{3}\vec{AM} = \vec{AB} \Rightarrow \vec{AM} = \frac{3}{4}\vec{AB}$
- $\vec{MP} = \frac{1}{2}\vec{MN}$ e $\vec{AM} + \vec{MN} = \vec{AN} = \frac{2}{3}\vec{AC}$

Prove isso!!

$\Rightarrow \vec{MP} = \frac{1}{2}\vec{MN} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\vec{AC} - \frac{3}{4}\vec{AB}\right) = \frac{1}{3}\vec{AC} - \frac{3}{8}\vec{AB}$

Logo,

$$\vec{AP} = \frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} - \frac{3}{8}\vec{AB} = \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{3}{8}\vec{AB}$$

Por outro lado, $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$

Segue de (*) que

$$\frac{\alpha}{3}\vec{AC} + \frac{3\alpha}{8}\vec{AB} = \lambda\vec{AC} + (1-\lambda)\vec{AB}$$

$$\Leftrightarrow \quad 8\alpha\vec{AC} + 9\alpha\vec{AB} = 24\lambda\vec{AC} + 24(1-\lambda)\vec{AB}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 8\alpha = 24\lambda \\ 9\alpha = 24 - 24\lambda \end{cases} \qquad \left(\text{Pois } \{\vec{AB}, \vec{AC}\} \text{ L.I.}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{8}{17}, \quad \boxed{\alpha = \frac{24}{17}}$$

9) $\vec{u}_1 = (0,0,0)$, $\vec{u}_2 = (-1,0,2)$, $\vec{u}_3 = (-1,1,2)$, $\vec{u}_4 = (0,1,0)$

$\vec{u}_5 = (1,1,1)$

Verdadeiro ou Falso:

a) $\vec{u}_1 = \vec{0}$ pode ser escritos de infinitas formas como combinação linear de $\vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$?

Suponha que $\vec{u}_1 = \vec{0} = x\vec{u}_2 + y\vec{u}_3 + z\vec{u}_4$

$$= (-x, 0, 2x) + (-y, y, 2y) + (0, z, 0)$$

$$= (-x-y, y+z, 2x+2y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x-y = 0 \\ y+z = 0 \\ 2x+2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = -y \\ z = -y \end{matrix} \quad (y \text{ arbitrário})$$

AFIRMAÇÃO VERDADEIRA:

Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ temos que

$$\vec{u}_1 = -\lambda \vec{u}_2 + \lambda \vec{u}_3 - \lambda \vec{u}_4$$

<u>OBS</u>: A pergunta feita no item (a) é equivalente a pergunta se $\{\vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ é L.D.

(b) $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ é L.I. ?

<u>Falso</u>: Como $\vec{u}_1 = \vec{0}$ o conjunto não pode ser L.I. Uma combinação linear não trivial de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ resultando no vetor $\vec{0}$ é:

$$1 \cdot \vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2 + 0 \cdot \vec{u}_3 = \vec{0}$$

Logo $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ é L.D.

(c) $\{\vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ é L.I. ?

<u>FALSO</u>: Do item (a) já sabemos que $(\lambda = 1)$

$$-\vec{u}_2 + \vec{u}_3 - \vec{u}_4 = \vec{0}$$

$\Rightarrow \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ é L.D.

(d) $\{\vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_5\}$ é L.I. ?

Considere a equação

$$\circledast \quad x\vec{u}_2 + y\vec{v}_3 + z\vec{u}_5 = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad (-x-y+z,\ y+z,\ 2x+2y+z) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x-y+z = 0 & (1) \\ \quad\ \ y+z = 0 & (2) \\ 2x+2y+z = 0 & (3) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow \ y = -z$

$(1) \Rightarrow \ -x+2z = 0 \quad \Rightarrow \ x = 2z$

$(3) \Rightarrow \ 4z - 2z + z = 0 \ \Rightarrow \ 3z = 0 \ \Rightarrow \ z = 0 \ \Rightarrow \ x = y = 0$

Logo, $\circledast \Rightarrow x = y = z = 0 \Rightarrow \{\vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_5\}$ L.I.

$\boxed{\text{Verdadeiro}}$

(e) $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ L.I. ?

Falso

$$1 \cdot \vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} \ \text{L.D.}$$

Os exercícios 9)f), 10), 11) utilizam o conceito de Base e Coordenadas que ainda não vimos