MAT–3457 — Álgebra Linear para Engenharia I — EP–USP

Terceira Prova — 17/08/2016

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

Assinatura: ______________________________ **Turma:** ______________

INSTRUÇÕES

1. Preencher o cabeçalho à tinta.
2. Essa prova consiste de 16 questões de múltipla escolha. Confira o seu caderno de questões.
3. Os celulares e demais aparelhos eletrônicos devem permanecer **DESLIGADOS** e fora do seu alcance.
4. No caso de descumprimento da conduta acadêmica durante esta prova, será atribuída nota zero.

RESPOSTAS DAS QUESTÕES

Teste	**Alternativa**
1	ⓐ ⓑ ⓒ ⓓ ⓔ
2	ⓐ ⓑ ⓒ ⓓ ⓔ
3	ⓐ ⓑ ⓒ ⓓ ⓔ
4	ⓐ ⓑ ⓒ ⓓ ⓔ
5	ⓐ ⓑ ⓒ ⓓ ⓔ
6	ⓐ ⓑ ⓒ ⓓ ⓔ
7	ⓐ ⓑ ⓒ ⓓ ⓔ
8	ⓐ ⓑ ⓒ ⓓ ⓔ
9	ⓐ ⓑ ⓒ ⓓ ⓔ
10	ⓐ ⓑ ⓒ ⓓ ⓔ
11	ⓐ ⓑ ⓒ ⓓ ⓔ
12	ⓐ ⓑ ⓒ ⓓ ⓔ
13	ⓐ ⓑ ⓒ ⓓ ⓔ
14	ⓐ ⓑ ⓒ ⓓ ⓔ
15	ⓐ ⓑ ⓒ ⓓ ⓔ
16	ⓐ ⓑ ⓒ ⓓ ⓔ
Tipo de Prova	
A	
Acertos	

BOA PROVA!

Questão 1. Seja V um espaço vetorial de dimensão n, S_1, S_2, S_3 subespaços de V e considere as seguintes afirmações:

(I) $\dim(S_1 + S_2 + S_3) = \dim S_1 + \dim S_2 + \dim S_3 - \dim(S_1 \cap S_2 \cap S_3)$.

(II) Se $S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \{0\}$, então $\dim(S_1 + S_2 + S_3) = \dim S_1 + \dim S_2 + \dim S_3$.

(III) $\dim((S_1 + S_2) \cap S_3) = \dim(S_1 \cap (S_2 + S_3) + \dim(S_2 \cap S_3) - \dim(S_1 \cap S_2)$

Assinale a alternativa correta:

a. Apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras
b. Apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira
c. Todas as afirmações são necessariamente verdadeiras
d. Apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira
e. Nenhuma das afirmações são necessariamente verdadeiras

Questão 2. Considere o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^5$:

$$A = \{(1, -1, 0, 2, 1), (3, -2, -1, 5, 2), (1, 1, 0, 0, 1), (-1, -2, 1, 1, 0), (0, 1, 1, -1, -1)\}.$$

Pode-se afirmar que a dimensão do espaço gerado por A é:

a. 3
b. 5
c. 4
d. 2
e. 1

Questão 3. Considere os subespaços de $P_3(\mathbb{R})$ definidos por

$$S_1 = [\{t^2 - 1, t^3 + 1, t^3 + 2t^2 - 1\}] \text{ e } S_2 = \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p(t) = p'(t)\}.$$

Podemos afirmar que:

a. $\dim(S_1 + S_2) = \dim S_1 + \dim S_2$
b. $S_1 + S_2 = P_3(\mathbb{R})$
c. $\dim S_1 = 3$ e $\dim S_2 = 1$
d. $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$
e. Se $p \notin S_1$, então $S_1 + S_2 + [p] = P_3(\mathbb{R})$.

Questão 4. Seja V um espaço vetorial de dimensão n e sejam $v_1, \ldots, v_r$ elementos distintos de V. Considere as seguintes afirmações:

(I) Se $r < n$, então $\{v_1, \ldots, v_r\}$ pode ser completado para uma base de V.
(II) Se $r > n$, então $\{v_1, \ldots, v_r\}$ gera V.
(III) Se $r = n$, então $\{v_1, \ldots, v_r\}$ é uma base de V.

Assinale a alternativa correta:

a. apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira.
b. apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira.
c. apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira.
d. todas as afirmações são necessariamente verdadeiras.
e. Nenhuma das afirmações são necessariamente verdadeiras.

Questão 5. Considere a base $B = \{t^2 - 1, t + t^3, 1 + t, t + t^2 + t^3\}$ de $P_3(\mathbb{R})$. Se

$$3t^2 - 2t - 4 = (a, b, c, d)_B$$

então $a + b + c + d$ é igual a:

a. -3
b. -1
c. 2
d. 0
e. 1

Questão 6. Considere o conjunto

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } a > 0, b > 0, c > 0, d > 0 \right\}$$

e as seguintes operações de soma e produto por escalar:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \boxplus \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & by \\ cz & dw \end{pmatrix}$$

$$\lambda \boxdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^\lambda & b^\lambda \\ c^\lambda & d^\lambda \end{pmatrix}$$

Considere também o seguinte subconjunto de V

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V : ad = 1 \text{ e } ac = 1 \right\}.$$

Podemos afirmar que:

a. $(V, \boxplus, \boxdot)$ não é um espaço vetorial.
b. $(V, \boxplus, \boxdot)$ é um espaço vetorial e S é um subespaço vetorial de dimensão 2 de V.
c. $(V, \boxplus, \boxdot)$ é um espaço vetorial, mas S não é um subespaço vetorial de V.
d. $(V, \boxplus, \boxdot)$ é um espaço vetorial e S é um subespaço vetorial de dimensão 3 de V.
e. $(V, \boxplus, \boxdot)$ é um espaço vetorial e S é um subespaço vetorial de dimensão 1 de V.

Questão 7. Seja V um espaço vetorial de dimensão n e sejam S_1, S_2, S_3 subespaços de V tais que

$$\dim S_1 = 4, \quad \dim(S_1 \cap S_2) = 2, \quad \dim S_2 = 2\dim S_3 + 2, \quad S_1 + S_2 = V.$$

Podemos afirmar que:

a. $n > 4$
b. $n \neq 8$
c. $n \neq 7$
d. Não existe um espaço vetorial V com subespaços S_1, S_2, S_3 satisfazendo todas as condições do enunciado
e. Se $n = 6$, então $\dim S_3 = 2$.

Questão 8. Considere as seguintes funções em $C(\mathbb{R})$

$$f_1(x) = \text{sen}2x, \quad f_2(x) = \cos 2x, \quad f_3(x) = \text{sen}^2 x, \quad f_4(x) = \cos^2 x.$$

Assinale a alternativa que contém um conjunto linearmente independente em $C(\mathbb{R})$

a. $\{f_1 + f_2 + f_3, f_1 - f_2, f_1 + f_3, f_4\}$
b. $\{f_2, f_3, f_1 + f_3, f_4\}$
c. $\{f_1 + f_2 + f_3, f_1 + f_3 - f_4, f_1 + f_3\}$
d. $\{f_1 - f_2, f_2 - f_3, f_3 - f_4, f_1 + f_2 + f_3 + f_4\}$
e. $\{f_1 + f_4, f_1 + f_3, f_2\}$

Questão 9. Seja $c \in \mathbb{R}$. Considere o sistema:

$$\begin{cases} cx_1 + cx_2 + cx_3 + cx_4 = 0 \\ x_1 + cx_2 + cx_3 + cx_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + cx_3 + cx_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + cx_4 = 0 \end{cases}$$

Se S é o espaço de soluções do sistema linear podemos afirmar que

a. Não existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\dim S = 3$.
b. Não existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\dim S = 0$
c. Se $c = 1$ então a $\dim S = 2$
d. Se $c = 1$ então a $\dim S = 1$
e. Não existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\dim S = 2$.

Questão 10. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere o conjunto:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & a \\ a & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Para que B seja uma base de $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ é necessário e suficiente que:

a. $a \neq 0$
b. $a \neq 0$ e $b > 1$
c. $a \neq b$
d. $a \neq b - 2$
e. $ab + 2 \neq 0$

Questão 11. Seja V um espaço vetorial e sejam $A = \{v_1, \ldots, v_k\}$ e $B = \{w_1, \ldots w_m\}$ subconjuntos de V. Considere as seguintes afirmações:

(I) Se $[A] \subset [B]$, então $A \subset B$.
(II) Se $A \subset B$, então $[A] \subset [B]$.
(III) Se A gera V e B é um conjunto linearmente independente, então $m \leq k$.

Assinale a alternativa correta:

a. Apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras
b. Todas as afirmações são necessariamente verdadeiras.
c. Apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira.
d. Apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira.
e. Apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira.

Questão 12. Considere o espaço vetorial

$$\mathrm{M}_{2\times 2}(P_2(\mathbb{R})) = \left\{ \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} : p_1, p_2, p_3, p_4 \in P_2(\mathbb{R}) \right\}$$

com as seguintes operações de soma e produto por escalar:

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} \boxplus \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + q_1 & p_2 + q_2 \\ p_3 + q_3 & p_4 + q_4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \boxdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda p_1 & \lambda p_2 \\ \lambda p_3 & \lambda p_4 \end{pmatrix}$$

Considere também os seguintes subespaços de $\mathrm{M}_{2\times 2}(P_2(\mathbb{R}))$

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(P_2(\mathbb{R})) : p_2 = p_3 \right\}$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(P_2(\mathbb{R})) : p_1(0) = 0 \text{ e } p_2 - p_3 + p_4 = 0 \right\}$$

Assinale a alternativa **FALSA**:

a. $\dim \mathrm{M}_{2\times 2}(P_2(\mathbb{R})) = 12$
b. $S_1 + S_2 = \mathrm{M}_{2\times 2}(P_2(\mathbb{R}))$
c. $\dim S_1 = 9$
d. $\dim S_2 = 8$
e. $\dim S_1 \cap S_2 = 6$

Questão 13. Sejam S_1, S_2 e S_3 subespaços de um espaço vetorial V. Considere as seguintes afirmações:

(I) Se $V = S_1 \oplus S_2$ então todo elemento $v \in V$ pode ser escrito de maneira única como $v = u + w$ com $u \in S_1$ e $w \in S_2$.
(II) Se $V = S_1 \oplus S_2$ e $\dim V = 3$, então $\dim S_1 < 2$ ou $\dim S_2 < 2$.
(III) Se $S_1 \oplus S_2 = S_1 \oplus S_3$ então $\dim S_2 = \dim S_3$.

Assinale a alternativa correta:

a. Somente a afirmação (I) é necessariamente verdadeira
b. Somente a afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras
c. Somente a afirmação (III) é necessariamente verdadeira
d. Todas as afirmações são necessariamente verdadeiras
e. Somente as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras

Questão 14. Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^3$:

$$S = [(a^2, 1, 1), (1, a^2, 1)].$$

Se $(m, n, 0) \in S$, onde $m, n \in \mathbb{R}$, podemos afirmar que

a. $m - n = 0$
b. Se $a = 0$ então necessariamente $m \neq n$
c. $m + n = 0$
d. Se $a \neq 0$ então necessariamente $m \neq n$
e. Se $a = 1$ então necessariamente $m = n = 2$

Questão 15. Considere os seguintes subespaços de $P_3(\mathbb{R})$:

$$S_1 = [t+1, (t+1)^2, t^2-1], \quad S_2 = \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p'(t) = 0\}, \quad S_3 = \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p''(1) = p''(-1)\}.$$

Assinale a alternativa **FALSA**:

a. $S_1 + S_2$ é uma soma direta.
b. $\dim(S_1 \cap S_3) = 1$.
c. $S_3 = S_1 + S_2$.
d. $\dim S_1 = 2$, $\dim S_2 = 1$, $\dim S_3 = 3$.
e. $S_2 + S_3$ é uma soma direta.

Questão 16. Considere os seguintes subespaços do espaço vetorial $\mathrm{M}_{n\times n}$:

$$S_1 = \{A \in \mathrm{M}_{n\times n} : A = A^t\}, \quad S_2 = \{A \in \mathrm{M}_{n\times n} : A = -A^t\}.$$

Considere as seguintes afirmações:

(I) Se $A \in \mathrm{M}_{n\times n}$ é uma matriz qualquer então

$$\frac{1}{2}(A + A^t) \in S_1 \qquad \frac{1}{2}(A - A^t) \in S_2$$

(II) $S_1 \cap S_2 = \{0\}$
(III) $\mathrm{M}_{n\times n} = S_1 \oplus S_2$

Assinale a alternativa correta:

a. Somente a afirmação (I) é necessariamente verdadeira
b. Somente a afirmação (II) é necessariamente verdadeira
c. Somente a afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras
d. Todas as afirmações são necessariamente verdadeiras
e. Somente as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras