Aula 5

Parte 1: Alguns exercícios da lista

9) Considere a relação $\alpha x + \beta x^2 \operatorname{sen} x + \gamma \cos x = 0$ com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Atribuindo a x os valores $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ obtemos as equações

$$(*) \begin{cases} \gamma = 0 \\ \frac{\pi\alpha}{2} + \frac{\pi^2}{4}\beta = 0 \\ \pi\alpha - \gamma = 0 \end{cases}$$

(i) Resolva o sistema linear acima
(ii) O conjunto $\mathcal{B} = \{x, x^2 \operatorname{sen} x, \cos x\}$ é L.I. ou L.D. em $C(\mathbb{R})$?

Solução:
(i) A única solução do sistema é $\alpha = \beta = \gamma = 0$

(ii) Para decidir se $\{x, x^2 \operatorname{sen} x, \cos x\}$ é L.I. ou L.D. em $C(\mathbb{R})$, precisamos estudar a equação $(**)$ abaixo, onde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$\alpha x + \beta x^2 \operatorname{sen} x + \gamma \cos x = 0 \qquad (**)$$

Note que esta é uma equação em $C(\mathbb{R})$. Ou seja, o 0 que aparece do lado direito da equação é o 0 do espaço vetorial $C(\mathbb{R})$, ou seja, a função constante igual a 0

Ou seja, estamos procurando $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha x + \beta x^2 \operatorname{sen} x + \gamma \cos x = 0 \quad \boxed{\text{PARA TODO } x \in \mathbb{R}}$$

Isso é importante!

Analisando esta equação quando $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$

obtemos o sistema $(*)$ cuja única solução é $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Logo, $\{x, x^2 \operatorname{sen} x, \cos x\}$ é L.I.

16) Determine uma base e a dimensão de cada um dos subespaços vetoriais abaixo

(ii) $S = \{ A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid A \text{ comuta com } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \}$

(iii) $S = \{ p \in P_4(\mathbb{R}) \mid p(1) = p(-1) = 0 \}$

<u>Solução</u>:

(i) Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. dizer que A comuta com $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ significa

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot A$$

ou seja

$$\begin{pmatrix} a+b & -2a+3b \\ c+d & -2c+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2c & b-2d \\ a+3c & b+3d \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b = a-2c \\ c+d = a+3c \\ -2a+3b = b-2d \\ -2c+3d = b+3d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+2c = 0 & (1) \\ -a-2c+d = 0 & (2) \\ -2a+2b+2d = 0 & (3) \\ b+2c = 0 & (4) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow b = -2c \xRightarrow{(2),(3)} \begin{cases} -a+b+d = 0 \\ -2a+2b+2d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -a+b+d = 0$$

$$\Rightarrow a = b+d \underset{\substack{\uparrow \\ b=-2c}}{=} -2c+d \qquad (c \,\&\, d \text{ arbitrários})$$

Logo, $A = \begin{pmatrix} -2c+d & -2c \\ c & d \end{pmatrix}$

<u>Base de S</u>: $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\dim S = 2}$

(ii) $S = \{p \in P_4(\mathbb{R}) \mid p(1) = p(-1) = 0\}$

Ou seja, $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \in S$

$$\iff \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 0 \end{cases}$$

Vamos resolver o sistema por escalonamento:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -\frac{1}{2} L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ou seja: $\begin{cases} a_0 + a_2 + a_4 = 0 \\ a_1 + a_3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ $a_0 = -a_2 - a_4$ $\quad$ a_2, a_3, a_4 arbitrário

$a_1 = -a_3$

$\Rightarrow S = \{(-a_2 - a_4) - a_3 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \mid a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}\}$

Uma base:

$B = (-1 + x^2, -x + x^3, -1 + x^4)$

$\dim S = 3$

18) Determine a dimensão do subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ gerado por $\{t, e^t, t - e^t, te^t, t + e^t\}$

Solução: Vou mostrar que uma base de

$S = \langle\{t, e^t, t - e^t, te^t, t + e^t\}\rangle$ é

$B = (t, e^t, te^t)$ e portanto $\dim S = 3$

i) B gera S :

Para mostrar que $\{t, e^t, te^t\}$ gera S, basta mostrar que podemos escrever todos os geradores originais de S como combinação linear de $\{t, e^t, te^t\}$

Ou seja, basta mostrar que $t-e^t$ e $t+e^t$ são combinações lineares de $\{t, e^t, te^t\}$

Mas
$$t-e^t = 1\cdot t + (-1)\cdot e^t + 0\cdot te^t$$
$$t+e^t = 1\cdot t + 1\cdot e^t + 0\cdot te^t$$

(ii) $\{t, e^t, te^t\}$ é L.I.

Considere a equação $\underbrace{\alpha t + \beta e^t + \gamma te^t = 0}_{(*)}$ em $F(\mathbb{R})$, ou seja,

estamos procurando α, β, γ tal que $(*)$ vale $\boxed{\text{PARA TODO } t \in \mathbb{R}}$

Consider esta equação quando $t=0$, $t=1$, $t=-1$

Temos

$$\begin{cases} \beta = 0 & (1) \\ \alpha + e\beta + e\gamma = 0 & (2) \\ -\alpha + \frac{\beta}{e} - \frac{\gamma}{e} = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + e\gamma = 0 \\ -\alpha - \frac{\gamma}{e} = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Somando as equaçoes}} \left(e - \frac{1}{e}\right)\gamma = 0$$

$\Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ Logo, $\alpha = \beta = \gamma = 0$

$\Rightarrow \{t, e^t, te^t\}$ é L.I.

$\Rightarrow \dim S = 3$

19) Seja $S = \{ A = (a_{ij}) \in M_{3\times 3} \mid a_{11}+a_{12}+a_{13} = a_{21}+a_{22}+a_{23} = a_{31}+a_{32}+a_{33} \}$

Mostre que S é um subespaço e determine a dimensão de S.

Solução: (1) S é subespaço:

Sejam
$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A}, \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}}_{B} \in S$$

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

Para mostrar que $A+B \in S$ temos que mostrar que a soma dos elementos da primeira linha é igual a soma dos elementos da segunda linha, que por sua vez, é a igual a soma dos elementos da terceira linha.

Vou mostrar Soma linha 1 = Soma linha 2
o outro é análogo.

$$(a_{11}+b_{11})+(a_{12}+b_{12})+(a_{13}+b_{13}) = (a_{11}+a_{12}+a_{13})+(b_{11}+b_{12}+b_{13}) =$$
$$= (a_{21}+a_{22}+a_{23})+(b_{21}+b_{22}+b_{23}) = (a_{21}+b_{21})+(a_{22}+b_{22})+(a_{23}+b_{23})$$

- Agora temos que mostrar que se $A \in S \Rightarrow \lambda A \in S$

Vou mostrar que

Soma linha 1 de λA = Soma linha 2 de λA

Para linha 3 segue de maneira análoga

$$\lambda a_{11}+\lambda a_{12}+\lambda a_{13} = \lambda(a_{11}+a_{12}+a_{13}) = \lambda(a_{21}+a_{22}+a_{23}) = \lambda a_{21}+\lambda a_{22}+\lambda a_{23}$$

- Temos que verificar que $0 \in S$,

mas $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e claramente a soma dos elementos de cada linha coincidem.

Logo S é subespaço.

(2) Dimensão de S:

$A \in S$ se $\begin{cases} a_{11} + a_{12} + a_{13} = \lambda \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} = \lambda \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} = \lambda \end{cases}$

$\Rightarrow$ $A = \begin{pmatrix} \lambda - a_{12} - a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda - \cancel{a_{21}}a_{22} - a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda - a_{32} - a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

7 parâmetros livres: $\lambda, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23}, a_{32}, a_{33}$

Vamos encontrar uma base:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Mostre que é uma base!!!)

Logo $\dim S = 7$

Parte 2 da Aula: Soma de Subespaço

Def: Sejam W_1 e W_2 subespaços de V.

A **soma** de W_1 e W_2 é o subconjunto

$$\boxed{W_1 + W_2 = \{ w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2 \} \subset V}$$

Proposição: Se W_1 e W_2 são subespaços de V então $W_1 + W_2$ é um subespaço de V.

Dem: (i) Sejam $u, v \in W_1 + W_2$

$$\Rightarrow u = u_1 + u_2 \quad \text{com } u_i \in W_i$$
$$v = v_1 + v_2 \quad \text{com } v_i \in W_i$$

$$\Rightarrow u + v = \underbrace{(u_1 + v_1)}_{W_1} + \underbrace{(u_2 + v_2)}_{W_2} \Rightarrow u + v \in W_1 + W_2$$

(ii) Se $u = u_1 + u_2 \in W_1 + W_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \lambda u = \underbrace{\lambda u_1}_{\in W_1} + \underbrace{\lambda u_2}_{\in W_2} \Rightarrow \lambda u \in W_1 + W_2$$

(iii) $$0 = \underset{W_1}{\underset{\cap}{0}} + \underset{W_2}{\underset{\cap}{0}} \Rightarrow 0 \in W_1 + W_2$$

$\blacksquare$

Exemplo: Seja $V = \mathbb{R}^3$ e $W_1 = \{ \lambda(1,-1,0) \mid \lambda \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^3$

$W_2 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z) \text{ satisfaz } x+y-z=0 \text{ e } y-2z=0 \}$

Note que $W_2 = \{ (x,y,z) \mid (x,y,z) = \alpha(-1,2,1),\ \alpha \in \mathbb{R} \}$

$W_1 + W_2$ é o plano $\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z) = \lambda(1,-1,0) + \alpha(-1,2,1) \}$

Exemplo: Seja $V = \mathbb{R}^4$ e

$$W_1 = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \right\} \quad \left(\text{Um plano em } \mathbb{R}^4 \right)$$

$$W_2 = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} 2x + z = 0 \\ x - w = 0 \end{cases} \right\} \quad \left(\text{Um plano em } \mathbb{R}^4 \right)$$

Note que

$$W_1 = \{ (-\alpha, \alpha, 2\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$$

$$W_2 = \{ (\lambda, \mu, -2\lambda, \lambda) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

$$\Rightarrow W_1 + W_2 = \{ (\lambda - \alpha, \mu + \alpha, -2(\lambda - \alpha), \lambda + \beta) \mid \alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

Um conjunto de geradores para $W_1 + W_2$ é

$$A = \{ \underbrace{(-1,1,2,0), (0,0,0,1)}_{\text{Geradores de } W_1}, \underbrace{(1,0,-2,1), (0,1,0,0)}_{\text{Geradores de } W_2} \}$$

Note que A não é L.I.

Por exemplo: $-(-1,1,2,0) + (0,1,0,0) + (0,0,0,1) = (1,0,-2,1)$

Por outro lado,

$$B = \big((-1,1,2,0), (0,0,0,1), (0,1,0,0) \big)$$ é uma base de $W_1 + W_2$

Logo, $W_1 + W_2 = \{ (-a, a+c, 2a, b) \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}$

$\dim(W_1 + W_2) = 3$. Observe que $\boxed{\dim(W_1 + W_2) \neq \dim W_1 + \dim W_2}$

Teorema (Dimensão da Soma)

Sejam W_1 e W_2 subespaços de V de dimensão finita
Então

$$\boxed{\dim(W_1+W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)}$$

Dem: Caso 1: $W_1 = \{0\}$ (ou $W_2=\{0\}$ cuja demonstração é análoga)

Se $W_1 = \{0\} \Rightarrow W_1 \cap W_2 = \{0\}$ & $W_1 + W_2 = W_2$

$$\Rightarrow \dim W_1 + W_2 = \dim W_2 = 0 + \dim W_2 - 0 = \underbrace{\dim W_1}_{0} + \dim W_2 - \underbrace{\dim W_1 \cap W_2}_{0}$$

Caso 2: $W_1 \neq \{0\}$ e $W_2 \neq \{0\}$

Suponha que $\dim(W_1 \cap W_2) = r$, $\dim W_1 = n$, $\dim W_2 = m$

Seja $E = (e_1, \dots, e_r)$ uma base de $W_1 \cap W_2$

Como $\{e_1, \dots, e_r\} \subset W_1$ é L.I., segue do teorema do completamento que

existe $f_{r+1}, \dots, f_n \in W_1$ tal que

$$F = (e_1, \dots, e_r, f_{r+1}, \dots, f_n) \text{ é base de } W_1$$

NOTE QUE $f_{r+1}, \dots, f_n$ NÃO pertence à $W_1 \cap W_2$ pois $\{e_1, \dots, e_r\}$ é L.I. maximal em $W_1 \cap W_2$

Analogamente, existe $g_{r+1}, \dots, g_m$ tal que

$$G = (e_1, \dots, e_r, g_{r+1}, \dots, g_m) \text{ é base de } W_2$$

NOTE QUE $g_{r+1}, \dots, g_{r+m}$ NÃO pertence à $W_1 \cap W_2$ pois $\{e_1, \dots, e_r\}$ é L.I. maximal em $W_1 \cap W_2$

Vamos mostrar que

$$B = (\underbrace{e_1, \dots, e_r}_{r}, \underbrace{f_{r+1}, \dots, f_n}_{n-r}, \underbrace{g_{r+1}, \dots, g_m}_{m-r}) \text{ é base de } W_1 + W_2$$

Isso irá provar que

$$\dim(W_1+W_2) = r + n - r + m - r = n + m - r = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2$$

Prova que B é base de W_1+W_2

(i) B gera W_1+W_2

Seja $w \in W_1+W_2 \Rightarrow w = w_1+w_2$ com $w_i \in W_i$

Sabemos que F é base de W_1 e G é base de W_2.

Logo,

$$w_1 = a_1e_1+\dots+a_re_r+a_{r+1}f_{r+1}+\dots+a_{r+n}f_n$$

$$w_2 = b_1e_1+\dots+b_re_r+b_{r+1}g_{r+1}+\dots+b_{r+m}g_m$$

$$\Rightarrow w = w_1+w_2 = \underbrace{(a_1+b_1)e_1+\dots+(a_r+b_r)e_r+a_{r+1}f_{r+1}+\dots+a_{r+n}f_{r+n}+b_{r+1}g_{r+1}+\dots+b_{r+m}g_{r+m}}_{\text{Combinação linear de } e_1,\dots,e_r,f_{r+1},\dots,f_n,g_{r+1},\dots,g_{r+m}}$$

(ii) $\{e_1,\dots,e_r,f_{r+1},\dots,f_{r+n},g_{r+1},\dots,g_{r+m}\}$ é L.I.

Considere a equação

$$a_1e_1+\dots+a_re_r+b_{r+1}f_{r+1}+\dots+b_{r+n}f_{r+n}+c_{r+1}g_{r+1}+\dots+c_{r+m}g_{r+m}=0$$

Suponha que essa equação admite solução não trivial:

<u>Caso 1</u>: Se $b_{r+1}=b_{r+2}=\dots=b_{r+n}=0$

Teriamos uma combinação linear não trivial nula de $e_1,\dots,e_r,g_{r+1},\dots,g_{r+m}$. Mas isso é um absurdo pois $\{e_1,\dots,e_r,g_{r+1},\dots,g_{r+m}\}$ é L.I.

<u>OBS</u>: O mesmo argumento mostra que não é possível que $c_{r+1}=\dots=c_{r+m}=0$. Logo, necessariamente acontece o caso 2 abaixo

Caso 2: $b_i \neq 0$ e $c_j \neq 0$ para algum $i = r+1, \dots, r+n$
$j = r+1, \dots, r+m$

Nesse caso

$$c_{r+1} g_{r+1} + \dots + c_{r+m} g_{r+m} = -a_1 e_1 - \dots - a_r e_r - b_{r+1} f_{r+1} - \dots - b_{r+n} f_{r+n}$$

$\Rightarrow c_{r+1} g_{r+1} + \dots + c_{r+m} g_{r+m} \in W_1 \cap W_2$

Mas isto é absurdo, pois como $(e_1, \dots, e_r)$ é base de $W_1 \cap W_2$

Teriamos que $c_{r+1} g_{r+1} + \dots + c_{r+m} g_{r+m} = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r$

e portanto

$\{e_1, \dots, e_r, g_{r+1}, \dots, g_{r+m}\}$ Não seria L.I.

Logo, Não é possível que (*) tenha uma solução não trivial

$\Rightarrow \{e_1, \dots, e_r, f_{r+1}, \dots, f_{r+n}, g_{r+1}, \dots, g_{r+m}\}$ é L.I.

Isso conclui a demonstração! ∎