Aula 4: Dimensão e o Teorema do Completamento

Pergunta: Dado um espaço vetorial V, qual a maior quantidade de vetores L.I. que V admite?

Exemplo: Se $V = \mathbb{R}^2$ então qualquer $\{v_1, v_2, v_3\}$ é L.D.

Dem: Seja
$$\left.\begin{array}{l} v_1 = (x_1, y_1) \\ v_2 = (x_2, y_2) \\ v_3 = (x_3, y_3) \end{array}\right\} \in \mathbb{R}^2$$

Considere a equação

$$a v_1 + b v_2 + c v_3 = 0 \qquad (\text{incógnitas } a, b, c)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a x_1 + b x_2 + c x_3 = 0 \\ a y_1 + b y_2 + c y_3 = 0 \end{cases}$$

Esse sistema é homogêneo e tem 2 equações & 3 incógnitas

$\Rightarrow$ O sistema é possível indeterminado! Seja

a_0, b_0, c_0 uma solução não trivial do sistema

$$\Rightarrow \quad a_0 v_1 + b_0 v_2 + c_0 v_3 = 0 \quad \text{com } a_0 \neq 0 \text{ ou } b_0 \neq 0 \text{ ou } c_0 \neq 0$$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ é L.D.

Por outro lado, $\{(1,0), (0,1)\}$ é L.I.

$\Rightarrow$ O número máximo de vetores L.I. em $\mathbb{R}^2$ é 2

OBS: O mesmo argumento mostra que o número máximo de vetores L.I. em $\mathbb{R}^n$ é n.

Vamos mostrar que o número máximo de vetores L.I. num espaço vetorial V é igual ao número de vetores em alguma base de V. Este número é a <u>dimensão</u> de V.

<u>Lema 1</u>: Seja $\{v_1, \dots, v_r\}$ L.D. e seja $v \in V$ qualquer. Então,

$$\{v_1, \dots, v_r, v\} \text{ é L.D.}$$

<u>Dem</u>: Sendo $\{v_1, \dots, v_r\}$ L.D., existe (por definição de L.D) $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ com pelo menos um $a_i \neq 0$ tal que

$$a_1 v_1 + \dots + a_r v_r = 0$$

Logo,

$$\underbrace{a_1 v_1 + \dots + a_r v_r + 0 \cdot v}_{\text{combinação linear não trivial}} = 0$$

$\Rightarrow \{v_1, \dots, v_r, v\}$ é L.D. ∎

<u>Lema 2</u>: Seja $\{v_1, \dots, v_r\}$ L.I. Então

$$\underbrace{\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_r\}}_{\text{Conjunto obtido retirando o vetor } v_i \text{ do conjunto } \{v_1, \dots, v_r\}} \text{ é L.I.}$$

<u>Dem</u>: Usando o Lema 1 temos que se $\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_r\}$ fosse L.D. então $\{v_1, \dots, v_r\}$ também seria (pois é obtido do anterior adicionando o vetor v_i)

Logo, $\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_r\}$ tem que ser L.I. ∎

<u>Teorema 3</u> Suponha que V é gerado por $v_1, \dots, v_m \in V$ e sejam $w_1, \dots, w_n$ são elementos de V, onde $n > m$,

Então $\{w_1, \dots, w_n\}$ é L.D.

<u>Dem</u>: Como $v_1, \dots, v_m$ gera V, e $w_i \in V$, podemos escrever cada w_i como combinação linear de $v_1, \dots, v_m$:

$$
\begin{aligned}
w_1 &= a_{11} v_1 + \dots + a_{m1} v_m \\
&\vdots \\
w_n &= a_{1n} v_1 + \dots + a_{mn} v_m
\end{aligned}
$$

Considere a equação (nas incógnitas $x_1, \dots, x_n$)

$$x_1 w_1 + \dots + x_n w_n = 0$$

$$
\iff \begin{cases}
a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\
a_{21} x_1 + \dots + a_{2n} x_n = 0 \\
\vdots \\
a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = 0
\end{cases}
$$

Temos m equações e n incógnitas

Admite solução não trivial!

Como $n > m \Rightarrow$ o sistema é possível <u>indeterminado</u>

$\Rightarrow \{w_1, \dots, w_n\}$ é L.D. ∎

<u>Teorema 4</u> : Se V é um espaço vetorial e
$B = (v_1, \dots, v_n)$, $B' = (w_1, \dots, w_m)$ são bases de V

$\Rightarrow \quad n = m$

Ou seja, todas as bases de V tem a mesma quantidade de vetores.

<u>Dem</u>; Temos que tanto $v_1, \dots, v_n$ quanto $w_1, \dots, w_m$ geram V.

Pelo Teorema 3, como $w_1, \dots, w_m$ é L.I.

$\Rightarrow m \leq n$

Mas pelo mesmo motivo, como $v_1, \dots, v_n$ é L.I. temos que $n \leq m$

$\Rightarrow \quad n = m$ ∎

Def: Seja V um espaço vetorial. Dizemos que a <u>dimensão</u> de V é n se V admite uma base com n vetores $B=(v_1,\dots,v_n)$

OBS: Se $V=\{0\} \Rightarrow \dim V = 0$
Se $V \neq \{0\}$ e V não admite base $\Rightarrow \dim V = \infty$

OBS: Seja V um espaço vetorial de dimensão n e seja $B=(e_1,\dots,e_n)$ uma base de V

$\Rightarrow$ Cada $v \in V$ pode ser escrito de maneira única como

$$v = a_1e_1 + \dots + a_ne_n. \qquad \underbrace{a_1,\dots,a_n}\in \mathbb{R}$$

Escrevemos $v=(a_1,\dots,a_n)_B$ coordenadas de v na base B

$$\boxed{\text{A dimensão de } V \text{ é o número de coordenadas necessário para descrever um vetor } v\in V}$$

Exemplo: Seja $V = T_{3\times3} = \left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33}\end{pmatrix}\right\}$ Matrizes triangulares superior 3×3

Precisamos de 6 coordenadas para descrever uma matriz $A\in T_{3\times3}$. Logo, intuitivamente, a dimensão de $T_{3\times3}$ é 6. Vamos mostrar isso:

Uma base de $T_{3\times3}$ é

$$\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$$

Exercício: Mostre que é uma base!

Def: Sejam $v_1, \dots, v_n \in V$. Dizemos que $v_1, \dots, v_n$ forma um conjunto linearmente independente maximal de V se

(i) $\{v_1, \dots, v_n\}$ é L.I.

(ii) Para todo $w \in V$, o conjunto $\{v_1, \dots, v_n, w\}$ é L.D.

Teorema 5: Se $v_1, \dots, v_n$ forma um subconjunto L.I. maximal de V, então $B = (v_1, \dots, v_n)$ é uma base (e portanto $\dim V = n$)

Dem: O conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ é L.I.. Logo, para mostrar que $B = (v_1, \dots, v_n)$ é uma base, basta mostrar que $\{v_1, \dots, v_n\}$ gera V.

Seja $w \in V$. $\Rightarrow$ O conjunto $\{v_1, \dots, v_n, w\}$ é L.D.

$\Rightarrow \exists\ a_1, \dots, a_n, \lambda \in \mathbb{R}$ com $a_i \neq 0$ para algum i ou $\lambda \neq 0$ tal que

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n + \lambda w = 0 \quad (*)$$

Note que $\lambda \neq 0$ pois caso contrário, se $\lambda = 0$, teriamos algum $a_i \neq 0$ e

$$0 = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n + 0 \cdot w = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

O que implicaria que $\{v_1, \dots, v_n\}$ seria L.D.

Logo, podemos usar $(*)$ para escrever

$$w = -\frac{a_1}{\lambda} v_1 - \frac{a_2}{\lambda} v_2 - \dots - \frac{a_n}{\lambda} v_n$$

$\Rightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ gera V $\Rightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ é base. $\blacksquare$

Teorema 6 Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é L.I. $\Rightarrow$ $B = (v_1, \dots, v_n)$ é uma base

Dem: Se $\dim V = n$, então existe uma base $E = (e_1, \dots, e_n)$ de V. Em particular, $\{e_1, \dots, e_n\}$ gera V e portanto, pelo teorema 1, segue que qualquer conjunto com $n+1$ elementos de V é L.D.

Logo, $v_1, \dots, v_n$ forma um conjunto L.I. maximal e pelo teorema 5 segue que $B = (v_1, \dots, v_n)$ é uma base.

Corolário 7 Se $\dim V = n$ e W é um subespaço de V tal que $\dim W = n \Rightarrow W = V$

Dem: Temos que $W \subset V$ e precisamos mostrar que $V \subset W$ para obter que $V = W$.

Como $\dim W = n \Rightarrow W$ tem uma base $B = (w_1, \dots, w_n)$.

Pelo teorema 6, segue que B também é base de V.

Logo, qualquer $v \in V$ pode ser escrito como

$$v = a_1 w_1 + \dots + a_n w_n \Rightarrow v \in W \Rightarrow V \subset W \Rightarrow V = W.$$

$\blacksquare$

Teorema 8 (Teorema do Completamento)

Seja V um espaço vetorial, $\dim V = n$, $r < n$. Se $\{v_1, \dots, v_r\}$ L.I., então existe $v_{r+1}, \dots, v_n$ tal que

$$B = (v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n) \text{ é uma base de } V$$

Dem: Se $r < n$ sabemos que $v_1, \dots, v_r$ não pode formar um conjunto L.I. maximal. Logo, existe v_{r+1} tal que $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}\}$ é L.I.

Se $r+1 = n$ acabou. Se $r+1 < n \Rightarrow v_1, \dots, v_r, v_{r+1}$ não pode ser maximal

$\Rightarrow$ existe v_{r+2} tal que $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, v_{r+2}\}$ L.I.

Se $r+2 = n$ acabou. Se $r+2 < n$ continuamos o processo acima até obter um conjunto L.I. maximal

$$\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}.$$

Assim obtemos a base $B = (v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$. ∎

<u>Corolário 9</u>: Se $\dim V = n$ e $W \subset V$ é um subespaço então $\dim W \leq n$

<u>Dem</u>: Se $W = \{0\} \Rightarrow \dim W = 0 \leq n$ ✓

Suponha que $W \neq \{0\}$ e seja $w_1 \in W$, $w_1 \neq 0$

Se $\{w_1\}$ não é L.I. maximal podemos completar para um conjunto L.I. maximal de W

$$\{w_1, \dots, w_m\}$$

Pelo Teorema 1 segue que $m \leq n$ e pelo Teorema 5 segue que $B = (w_1, \dots, w_m)$ é uma base de W

$$\Rightarrow \quad \dim W \leq \dim V = n$$ ∎