Dependência linear, Independência linear & Bases

Aula 3

Lembre que: $(V, +, \cdot)$ espaço vetorial

- $W \subset V$ é um subespaço se
  (i) $w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$
  (ii) $w \in W,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda w \in W$
  (iii) $0 \in W$

Teorema: Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial e sejam W_1 & W_2 subespaços de V. Então $W_1 \cap W_2$ é um subespaço de V

Dem: Suponha que $u, v \in W_1 \cap W_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Logo

$$u, v \in W_1 \quad \text{e} \quad u, v \in W_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underbrace{u+v \in W_1}_{W_1 \text{ é subespaço}} \quad \text{e} \quad \underbrace{u+v \in W_2}_{W_2 \text{ é subespaço}} \Rightarrow u+v \in W_1 \cap W_2 \\ \overbrace{\lambda u \in W_1} \quad \text{e} \quad \overbrace{\lambda u \in W_2} \Rightarrow \lambda u \in W_1 \cap W_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow W_1 \cap W_2$ é subespaço. ■

OBS: Segue que dado qualquer subconjunto $S \subset V$, podemos considera:

O menor subespaço de V que contém $S \equiv \langle S \rangle$

Ou seja, $\langle S \rangle$ é um subespaço vetorial de V que satisfaz as seguintes propriedades

(1) $S \subset \langle S \rangle$ (é um subconjunto)

(2) Se $W \subset V$ é um subespaço, e $S \subset W \Rightarrow \langle S \rangle \subset W$

- $\boxed{\langle S \rangle \text{ pode ser definido a interseção de todos os subespaços de } V \text{ que contém } S.}$

Def: $\langle S \rangle$ é chamado o subespaço gerado por S

Exemplo: Se $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ é um subconjunto finito, então

$$\langle S \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

Vamos entender este exemplo:

1º) $\langle S \rangle$ é um subespaço de V pois

(i) $(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) + (\mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n) = (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n) v_n \in \langle S \rangle$

(ii) $\lambda (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = (\lambda \lambda_1) v_1 + \dots + (\lambda \lambda_n) v_n \in \langle S \rangle$

2º) $S \subset \langle S \rangle$ pois se $s \in S \Rightarrow s = v_i$ para algum i

$$s = v_i = 0 v_1 + \dots + 0 v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \dots + 0 \cdot v_n \in \langle S \rangle$$

3º) Se $W \subset V$ é um subespaço & $S \subset W$ então $\langle S \rangle \subset W$

pois como W é subespaço e $v_i \in W$ $\forall i$, segue que $\lambda_i v_i \in W$ $\forall \lambda_i \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in W$ (Pois W é subespaço!)

Exemplo: Seja $V = \mathbb{R}^3$ e $S = \{(1,0,1)\}$

$\Rightarrow \langle S \rangle =$ reta que passa por 0 e contém $(1,0,1)$

- Se $S = \{(1,0,1), (-1,1,0)\} \Rightarrow \langle S \rangle$ é o plano que passa pela origem e contém $(1,0,1)$ & $(-1,1,0)$

Def: Sejam $v_1, \dots, v_n \in V$. Uma combinação linear de $v_1, \dots, v_n$ é

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \in V \quad \text{com} \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

Obs: $\langle S \rangle = \{$combinações lineares finitas de elementos de $S\}$

Def: Se $W \subset V$ é um subespaço vetorial, dizemos que $\{w_1, \dots, w_n\} \subset W$ gera W se todo $w \in W$ pode ser escrito como combinação linear de $w_1, \dots, w_n$.

Ou seja: Para cada $w \in W$ existem $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$w = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_n w_n$$

ou em outras palavras

$$W = \langle \{w_1, \dots, w_n\} \rangle$$

Exemplo: Seja $W = \{ p(x) \in P_2(\mathbb{R}) \mid p(1) = 0 \}$

ou seja, $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in W \iff a_0 + a_1 + a_2 = 0$

Vamos mostrar que $\{x-1, (x-1)^2\}$ gera W:

Seja $\underbrace{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}_{p(x)} \in W \Rightarrow a_0 + a_1 + a_2 = 0 \Rightarrow a_0 = -a_1 - a_2$

queremos encontrar λ & β

$$\Rightarrow p(x) = (-a_1 - a_2) + a_1 x + a_2 x^2 \overset{1}{=} \lambda(x-1) + \beta(x^2 - 2x + 1)$$

$$\iff \begin{cases} -a_1 - a_2 = -\lambda + \beta \\ a_1 = \lambda - 2\beta \\ a_2 = \beta \end{cases} \iff \boxed{\begin{matrix} \beta = a_2 \\ \lambda = a_1 + 2a_2 \end{matrix}} \quad \text{tem solução}$$

OBS: Note que W do exemplo acima também é gerado por $\{x-1, (x-1)^2, (x-1)(x+1)\}$.

basta escrever:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = \underbrace{(a_1 + 2a_2)}_{\alpha}(x-1) + \underbrace{a_2}_{\beta}(x-1)^2 + \underbrace{0}_{\gamma} \cdot (x-1)(x+1)$$

Note que $(x-1)(x+1)$ também pode ser escrito como combinação linear de $(x-1)$, $(x-1)^2$.

De fato,

$$(x-1)(x+1) = x^2 - 1 = \alpha(x-1) + \beta(x^2 - 2x - 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha - \beta = -1 \\ \alpha - 2\beta = 0 \\ \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 2, \ \beta = 1$$

Ou seja:

$$\boxed{(x-1)(x+1) = 2(x-1) + (x-1)^2} \quad (*)$$

Def: Seja V um espaço vetorial. Um conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é Linearmente Independente (L.I.) se

$$\boxed{a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0 \iff a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0}$$

Ou seja,

A única combinação linear de $v_1, \ldots, v_n$ que se anula é a que tem todos os coeficientes $\equiv 0$

* Se $\{v_1,\dots,v_n\}$ não é L.I. dizemos que é Linearmente Dependente (L.D.)

Ou seja, $\{v_1,\dots,v_n\}$ é L.D. se existe $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$ com algum $a_i \neq 0$ tal que

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$$

Exemplo: Seja $V = P_2(\mathbb{R})$.

- $\{x-1, (x-1)^2\}$ é L.I.

Dem: Suponha que $a(x-1) + b(x-1)^2 = 0$

$$\Rightarrow ax - a + bx^2 - 2bx + b = 0$$

$$\Rightarrow bx^2 + (a-2b)x + b-a = 0$$

$$\Rightarrow a=0 \ \& \ b=0$$

- $\{x-1, (x-1)^2, x^2-1\}$ é L.D. :

Dem: Vimos que $x^2-1 = 2(x-1) + (x-1)^2$

$$\Rightarrow \underbrace{2}_{a_1}(x-1) + \underbrace{1}_{a_2}(x-1)^2 \underbrace{-1}_{a_3}(x^2-1) = 0$$

Exemplo: Verifique se $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ é L.I. ou L.D..

solução:

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c-d & b-c+d \\ 0 & a+c+d \end{pmatrix}$$

$$= (*)$$

$$* = 0 \iff \begin{cases} a+b+c-d = 0 \\ b-c+d = 0 \\ a+c+d = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{matrix} 3 \text{ equações homogêneas} \\ \& \;\; 4 \text{ incógnitas} \end{matrix} \right)$$

$\Rightarrow$ Sistema é possível indeterminado $\Rightarrow$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{L. D.}$$

Explicitamente, escalonando o sistema obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \to -L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Solução geral do sistema:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

Por exemplo, para $s = 1$, temos que

$$-4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Combinação linear não trivial!

Def: Seja V um espaço vetorial. Uma base de V é um conjunto ordenado $(v_1,\dots,v_n)$ de elementos de V, tal que

(1) $\{v_1,\dots,v_n\}$ gera V

(2) $\{v_1,\dots,v_n\}$ é L.I.

OBS: A condição (1) acima significa que todo elemento $v\in V$ pode ser escrito como combinação linear de $\{v_1,\dots,v_n\}$.

(**) $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$, $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$

A condição (2) garante que a expressão de v como combinação linear de $\{v_1,\dots,v_n\}$ é **única**!

De fato, se $v = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$

$\Rightarrow v - v = 0 = (a_1 - b_1) v_1 + \dots + (a_n - b_n) v_n$

$\Rightarrow a_1 = b_1 \; , \; \dots \; , \; a_n = b_n$

Def: Seja $B = (v_1,\dots,v_n)$ uma base de V. Se

$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$, dizemos que as coordenadas de v na base B são $a_1,\dots,a_n$ e escrevemos

$$\boxed{v = (a_1,\dots,a_n)_B}$$

Exemplo

1) Seja $V = P_n(\mathbb{R})$. Uma base de V é

$$B = (1, x, x^2, x^3, \dots, x^n)$$

2) Seja $W = \{ p(x) \in P_2(\mathbb{R}) \mid p(1) = 0 \}$

Uma base de W é $B = (x-1, x^2-1)$

Dem: (1) B gera W;

Seja $p(x) \in W$, i.e., $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ com $a_0 + a_1 + a_2 = 0$

Logo $p(x) = -a_1 - a_2 + a_1 x + a_2 x^2$

Vamos mostrar que $p(x)$ pode ser escrito como combinação linear de $x-1$ e x^2-1

$$(-a_1 - a_2) + a_1 x + a_2 x^2 = \alpha(x-1) + \beta(x^2-1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a_1 - a_2 = -\alpha - \beta \\ a_1 = \alpha \\ a_2 = \beta \end{cases}$$

Solução $\alpha = a_1$, $\beta = a_2$

$$\Rightarrow \boxed{p(x) = a_1(x-1) + \beta(x^2-1)}$$

(2) Vamos mostrar que é L.I.: Suponha

$$\alpha(x-1) + \beta(x^2-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\alpha - \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 0 = \beta$$

Logo é base.

Exemplo: Seja $S_{3\times3} = \{A \in \mathcal{M}_{3\times3} \mid A = A^T\}$

Uma base de $S_{3\times3}$ é

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Dem: Exercício!