Aula 2
Subespaço Vetorial

Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial

Def: Um subespaço (vetorial) de V é um subconjunto $W \subseteq V$ tal que
(i) Se $w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$
(ii) se $w \in W$ & $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda w \in W$

OBS: Segue em particular de (ii) que o elemento neutro $0 \in V$ pertence à W

$$\boxed{0 \in W}$$

OBS: Se $W \subset V$ é um subespaço $\Rightarrow (W, +, \cdot)$ é um espaço vetorial

Primeiros Exemplos:

1) $\{0\} \subset V$ & $V \subset V$ são subespaços de V

2) Seja $V = \mathbb{R}^n$ e $W = \{(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n = 0\}$

$\Rightarrow W$ é um subespaço de V.

Vamos verificar isso explicitamente:

- Um elemento de W é da forma $(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$.

(i) Temos que verificar que se $w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$

seja $w_1 = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$; $w_2 = (y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0)$

$\Rightarrow w_1 + w_2 = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_k + y_k, 0, \dots, 0)$

que pertence à W pois as ultimas coord. são 0

(ii) Temos que verificar que $\lambda w \in W$ $\forall w \in W$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_k, 0, \dots, 0) \in W$ ////

3) $P_3(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ (polinômios de grau ≤ 3)

pode ser visto como um subespaço de

$P_5(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ (polinômios de grau ≤ 5)

4) Seja $\vec{v} \in V^3$ e $W \subset V^3$ o subconjunto de todos os vetores perpendiculares à $\vec{v}$, i.e.,

$$W = \{\vec{w} \in V^3 \mid \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0\}$$

Vamos verificar que W é um subespaço:

(i) Sejam $w_1, w_2 \in W$, ou seja, $\langle v, w_1 \rangle = 0, \langle v, w_2 \rangle = 0$

Temos que verificar que $w_1 + w_2 \in W$. Ou seja, queremo verificar se

$$\langle v, w_1 + w_2 \rangle = 0$$

Calculamos:

$$\underbrace{\langle v, w_1 + w_2 \rangle =}_{\text{linearidade de } \langle , \rangle} \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle \underbrace{=}_{\substack{w_1 \in W \\ w_2 \in W}} 0 \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$$

(ii) Seja $\lambda \in \mathbb{R}$, $w \in W$. Temos que verificar se $\lambda w \in W$.

Calculamos: $$\langle v, \lambda w \rangle \underbrace{=}_{\text{linearidade}} \lambda \langle v, w \rangle \underbrace{=}_{w \in W} 0 \Rightarrow \lambda w \in W$$

5) Seja $V = M_{n\times n}$, $W = S_{n\times n} = \{A \in M_{n\times n} \mid A = A^T\}$

$\Rightarrow W$ é um subespaço de V

(i) $A, B \in W \Rightarrow (A+B)^T = A^T + B^T = A + B$

(ii) $A \in W, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow (\lambda A)^T = \lambda A^T = \lambda A$

6) Seja $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$,

$W = C(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid f$ é contínua$\}$

$\Rightarrow$ W é subespaço de V

7) $V = C(\mathbb{R})$, $W = \{f \in C(\mathbb{R}) \mid f$ é derivável$\}$
é subespaço

8) Seja W como acima e seja $U \subset W$ o subconjunto das funções $f \in W$ que satisfazem a equação diferencial

$$f' + 2f = 0$$

$\Rightarrow$ U é um subespaço de W

Vamos verificar:

(i) Se $f, g \in U$, calculamos

$$(f+g)' + 2(f+g) = f' + g' + 2f + 2g = (f' + 2f) + (g' + 2g) = 0$$

$\Rightarrow f + g \in U$

(ii) se $f \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$ calculamos:

$$(\lambda f)' + 2(\lambda f) = \lambda(f' + 2f) = 0 \Rightarrow \lambda f \in U$$

Logo U é um subespaço

Construção Geral: Seja $(V, +, \cdot)$ & $(W, +, \cdot)$ espaços vet.

Def: Uma aplicação linear de V para W é uma função

$$F : V \longrightarrow W \quad \text{tal que}$$

(i) $F(u+v) = F(u) + F(v) \quad \forall u, v \in V$

(ii) $F(\lambda u) = \lambda F(u) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in V$

Prop: Se $F: V \longrightarrow W$ é um aplicação linear então os seguintes conjuntos são subespaços vetoriais

- $N(F) = \{ v \in V \mid F(v) = 0 \} \subset V$ (Núcleo de F)
- $Im(F) = \{ F(v) \in W \mid v \in V \} \subset W$ (Imagem de F)

Dem: • Primeiro vou mostrar que $N(F)$ é um subespaço de V:

(i) Se $u, v \in N(F) \Rightarrow F(u+v) \underset{F \text{ é linear}}{=} F(u) + F(v) \underset{u,v \in N(F)}{=} 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow u + v \in N(F)$

(ii) se $u \in N(F)$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow F(\lambda u) \underset{F \text{ é linear}}{=} \lambda F(u) \underset{u,v \in N(F)}{=} 0 \Rightarrow \lambda u \in N(F)$

• Agora vou mostrar que $Im(F) \subset W$ é um subespaço vetorial:

(i) sejam $w_1, w_2 \in Im\, F$, ou seja, $w_1 = F(v_1)$, $w_2 = F(v_2)$ para algum $v_1, v_2 \in V$

$\Rightarrow w_1 + w_2 = F(v_1) + F(v_2) = F(v_1 + v_2) \in Im(F)$

(ii) Seja $w = F(v) \in Im\, F$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \lambda w = \lambda F(v) = F(\lambda v) \in Im\, F$ $\blacksquare$

Exemplos

1) Seja $k < n$ e $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, $F(x_1, \dots, x_n) = (x_{k+1}, \dots, x_n)$ (Mostre que F é linear!)

$\Rightarrow N(F) = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n \}$

2) Seja $\vec{v} \in V^3$ e $F: V^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(\vec{w}) = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ (Mostre que F é linear!)

$\Rightarrow N(F) = \{ \vec{w} \in V^3 \mid \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0 \}$

3) Seja $\quad F: \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$A \longmapsto A - A^T$$

Vamos verificar que F é linear:

- $F(A+B) = (A+B) - (A+B)^T = A+B - A^T - B^T = (A-A^T) + (B-B^T) =$

$$= F(A) + F(B)$$

- $F(\lambda A) = \lambda A - (\lambda A)^T = \lambda A - \lambda A^T = \lambda(A-A^T) = \lambda F(A)$

Logo F é linear.

$$N(F) = S_{n\times n} = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid A = A^T\}$$

4) Seja $\quad F: C'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$

$$F(f) = f' + 2f$$

$\Rightarrow$ F é linear & $N(F) = \{f \in C'(\mathbb{R}) \mid f' + 2f = 0\}$

5) Seja $\quad F: P_n(\mathbb{R}) \longrightarrow P_{n-1}(\mathbb{R})$

$$p(x) \longmapsto p'(x)$$

Logo, se $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ então

$$F(p(x)) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1}$$

$$N(F) = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in P_n(X) \mid a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0\}$$

6) $F: P_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad F(p(x)) = p'(1)$

Mostre que $N(F) = \{a_0 + \cdots + a_n x^n \mid a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + n a_n = 0\}$

• Exemplos de subconjunto que <u>NÃO</u> são subespaços:

1) Seja $V = \mathbb{R}^3$ e W o plano

$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} \mid (x,y,z) = (1,0,1) + a(-1,1,0) + b(0,1,-1),\ a,b \in \mathbb{R}\}$

Sabemos que se W for subespaço $\Rightarrow 0 \in W$

Vamos mostrar que $0 \notin W$ e portanto W não pode ser um subespaço

Para que $0 \in W$, deveria existir $a,b \in \mathbb{R}$ tal que

$(0,0,0) = (1-a,\ a+b,\ 1-b)$. Ou seja, o sistema

$$(**) \begin{cases} 1-a=0 \\ a+b=0 \\ 1-b=0 \end{cases}$$ deveria ter solução.

Mas $(**)$ é impossível (porque?)

Logo $0 \notin W \Rightarrow W$ não é subespaço

<u>Exercício</u>: Mostre diretamente que <u>não</u> é verdade, em geral, que

$$w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$$
$$\lambda \in \mathbb{R},\ w \in W \Rightarrow \lambda w \in W$$

2) Seja $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \{(t,t^2) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$

(W é o gráfico da parábola $y = x^2$)

Note que $w_1, w_2 \in W \not\Rightarrow w_1 + w_2 \in W$

Pois $(t,t^2) + (s,s^2) = (t+s,\ t^2+s^2) \neq (t+s, (t+s)^2)$

Teorema: Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial e sejam W_1 & W_2 subespaços de V. Então $W_1 \cap W_2$ é um subespaço de V

Dem: Suponha que $u, v \in W_1 \cap W_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Logo

$$u, v \in W_1 \quad \text{e} \quad u, v \in W_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underbrace{u+v \in W_1}_{W_1 \text{ é subespaço}} \quad \text{e} \quad \underbrace{u+v \in W_2}_{W_2 \text{ é subespaço}} \Rightarrow u+v \in W_1 \cap W_2 \\ \overbrace{\lambda u \in W_1} \quad \text{e} \quad \overbrace{\lambda u \in W_2} \Rightarrow \lambda u \in W_1 \cap W_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow W_1 \cap W_2$ é subespaço. ∎

OBS: Segue que dado qualquer subconjunto $S \subset V$, podemos considera:

O menor subespaço de V que contém $S \equiv \langle S \rangle$

Ou seja, $\langle S \rangle$ é um subespaço vetorial de V que satisfaz as seguintes propriedades

(1) $S \subset \langle S \rangle$ (é um subconjunto)

(2) Se $W \subset V$ é um subespaço, e $S \subset W \Rightarrow \langle S \rangle \subset W$

- $\boxed{\langle S \rangle \text{ pode ser definido a interseção de todos os subespaços de } V \text{ que contém } S.}$

Def: $\langle S \rangle$ é chamado o subespaço gerado por S

<u>Exemplo</u>: Se $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ é um subconjunto finito, então

$$\langle S \rangle = \{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \}$$

Vamos entender este exemplo:

1º) $\langle S \rangle$ é um subespaço de V pois

(i) $(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) + (\mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n) = (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n) v_n \in \langle S \rangle$

(ii) $\lambda (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = (\lambda \lambda_1) v_1 + \dots + (\lambda \lambda_n) v_n \in \langle S \rangle$

2º) $S \subset \langle S \rangle$ pois se $s \in S \Rightarrow s = v_i$ para algum i

$$s = v_i = 0 v_1 + \dots + 0 v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \dots + 0 \cdot v_n \in \langle S \rangle$$

3º) Se $W \subset V$ é um subespaço & $S \subset W$ então $\langle S \rangle \subset W$

pois como W é subespaço e $v_i \in W$ $\forall i$, segue que $\lambda_i v_i \in W$ $\forall \lambda_i \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in W$ (Pois W é subespaço!)

<u>Exemplo</u>: Seja $V = \mathbb{R}^3$ e $S = \{(1,0,1)\}$

$\Rightarrow \langle S \rangle =$ reta que passa por 0 e contém $(1,0,1)$

- Se $S = \{(1,0,1), (-1,1,0)\} \Rightarrow \langle S \rangle$ é o plano que passa pela origem e contém $(1,0,1)$ & $(-1,1,0)$

Def: Sejam $v_1, \dots, v_n \in V$. Uma combinação linear de $v_1, \dots, v_n$ é

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \in V \quad \text{com} \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

Obs: $\langle S \rangle = \{$combinações lineares finitas de elementos de $S\}$

Def: Se $W \subset V$ é um subespaço vetorial, dizemos que $\{v_1, \dots, v_n\}$ gera W se todo $w \in W$ pode ser escrito como combinação linear de $v_1, \dots, v_n$.

Ou seja: Para cada $w \in W$ existem $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$w = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

ou em outras palavras

$$W \subset \langle \{v_1, \dots, v_n\} \rangle$$