Aula 1

Espaços Vetoriais

Ideia: Axiomatizar as propriedades de V^3 (ou V^n) e assim poder tratar de outros espaços como se fossem "espaços de vetores"

Def: Um espaço vetorial uma tripla $(V, \boxplus, \boxdot)$

onde V é um conjunto e

$\boxplus : V \times V \longrightarrow V$ é uma operação chamada soma

$\boxdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$ é uma operação chamada produto por escalar

Tal que as seguintes propriedades são satisfeitas:

1) A soma é associativa:

$$u \boxplus (v \boxplus w) = (u \boxplus v) \boxplus w \qquad \forall u, v, w \in V$$

2) Elemento neutro da Soma:

Existe um elemento $\tilde{0} \in V$ tal que

$$\tilde{0} \boxplus v = v \boxplus \tilde{0} = v \qquad \forall v \in V$$

3) Elemento inverso da soma:

Dado $v \in V$, o elemento $(-1) \cdot v$ (denotado por $-v$) satisfaz

$$v \boxplus (-v) = \tilde{0}$$

4) A soma é comutativa:

$$u \boxplus v = v \boxplus u \qquad \forall u, v \in V$$

5) Distributivo sobre vetores: $\lambda \boxdot (u \boxplus v) = (\lambda \boxdot u) \boxplus (\lambda \boxdot v)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V$

6) Distributivo sobre escalares: $(\lambda + \mu) \boxdot v = (\lambda \boxdot v) \boxplus (\mu \boxdot v)$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall v \in V$

7) Produto por escalar associativo: $(\lambda \mu) \boxdot v = \lambda \boxdot (\mu \boxdot v)$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall v \in V$

8) Unitário: $1 \boxdot v = v \qquad \forall v \in V$

OBS: Quando não causar confusão, iremos denotar a operação de soma por $+$ e de produto por escalar por $\cdot$.

Ou seja, vou escrever $\begin{cases} u+v & \text{para } u \boxplus v \\ \lambda \cdot u = \lambda u & \text{para } \lambda \boxdot u \end{cases}$

OBS: As operações $+$ & $\cdot$ fazem parte da definição do espaço vetorial. Ou seja, quando eu for definir um espaço vetorial, preciso dar três informações:

- Um conjunto V
- Uma soma $u+v$ $\forall u,v \in V$
- Um produto por escalar λu $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $u \in V$

Primeiros Exemplos

1) $V = \mathbb{R}$, $+$ = soma usual de números reais, $\cdot$ = produto usual de números reais

2) $V = \mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \ \forall i = 1, \dots, n\}$

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2 \quad , \lambda x_n)$$

3) $V^3 = \{\text{vetores em } \mathbb{R}^3\}$

$\vec{v} + \vec{w}$ definido pela regra do paralelogramo

$$\lambda \vec{v} = \begin{cases} \bullet \text{ vetor com mesma direção e sentido de } \vec{v} \text{ e comprimento } |\lambda| \cdot \|\vec{v}\| & \text{se } \lambda > 0 \\ \bullet\ \vec{0} & \text{se } \lambda = 0 \\ \bullet \text{ mesma direção e sentido oposto de } \vec{v} \text{ e comprimento } |\lambda| \|\vec{v}\| & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}$$

(Como definido nas primeiras aulas do curso)

4) V^n = vetores em $\mathbb{R}^n$ com $+$ & $\cdot$ definidos da mesma forma como no exemplo anterior

Exemplos que <u>NÃO</u> são espaços vetoriais:

1) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, $+$ = soma usual de numeros reais

$$\lambda \cdot x = |\lambda| x$$

<u>Problema</u>: Não tem elemento inverso da soma

$$x + (-1)\cdot x = x + x = 2x \neq 0$$

se $x \neq 0$

2) $V = \mathbb{R}$, $x \boxplus y = x^2 - y^2$, $\lambda \boxdot x = \lambda^2 x$

<u>Problema</u>: Não é associativo

$$(x \boxplus y) \boxplus z = (x^2 - y^2) \boxplus z = (x^2-y^2)^2 - z^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 - z^2$$

$$x \boxplus (y \boxplus z) = x \boxplus (y^2 - z^2) = x^2 - (y^2 - z^2)^2 = x^2 - y^4 - \; {}^2z^2 - z^4$$

<u>OBS</u>: Esse exemplo falha outros axiomas de espaço vetorial!

<u>Exercício</u>: No exemplo acima, verifique quais axiomas de espaço vetorial são satisfeitos e quais não são

<u>Algumas Propriedades Básicas</u>: Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial

<u>Prop 1</u>: O elemento neutro da soma é único

<u>Dem</u>: Suponha que

$$v + w = v \quad \forall v$$

Somando $-v$ dos dois lados da equação temos que

$$(v+w) + (-v) = v + (-v) = \tilde{0} \quad \text{(pelo axioma 3)}$$

$$\overset{\| \text{(associativo)}}{} v + (w + (-v)) \underset{\uparrow \text{comutativa}}{=} v + (-v + w) = (v + (-v)) + w \overset{\downarrow}{=} \tilde{0} + w = w$$

(associativo)

$$\Bigg\} \; \tilde{0} = w$$

■

OBS: Quando não causar confusão irei denotar por $\mathbf{0} \in V$ o elemento neutro da soma.

Prop 2: Seja $0 \in \mathbb{R}$ (o número zero) e seja $v \in V$

$$\Rightarrow \quad 0 \cdot v = \tilde{0} \in V$$

Dem: $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{elemento inverso da soma}}}{\tilde{0} =} v + (-1) \cdot v \underset{\substack{\uparrow \\ \text{distributiva sobre números}}}{=} (1-1) v = 0 \cdot v$ ∎

OBS: A propriedade 2 acima nos dá uma forma de identificar imediatamente quem é o elemento neutro da soma num espaço vetorial: Basta calcular

$$0 \cdot v = \tilde{0}$$

Prop 3: $\lambda \cdot \tilde{0} = \tilde{0} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Dem: $\lambda \cdot \tilde{0} = \lambda (\tilde{0} + \tilde{0}) = \lambda \tilde{0} + \lambda \tilde{0}$

Somando $-\lambda \tilde{0}$ dos dois lados ob que

$$\tilde{0} = \lambda \tilde{0}$$ ∎

Mais exemplos de espaços vetoriais:

1) $V = \mathcal{M}_{m \times n}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

2) $P_n(\mathbb{R}) = \{ p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R} \}$

$(a_0 + \cdots + a_n x^n) + (b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n) = (a_0 + b_0) + \cdots + (a_n + b_n) x^n$

$\lambda (a_0 + \cdots + a_n x^n) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \cdots + \lambda a_n x^n$

3) X conjunto qualquer ; $V = \mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \{ f : X \to \mathbb{R} \}$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$

OBS: $\tilde{0}$ é a função constante $\tilde{0}(x) = 0 \quad \forall x \in X$

4) $V = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \}$

$x \boxplus y = xy$

$\lambda \boxdot x = x^{\lambda}$

OBS: $\tilde{0} = 1$

- Algumas construções de exemplos novos à partir de exemplos conhecidos:

1) Se $(V, +, \cdot)$ & $(W, +, \cdot)$ são espaços vetoriais então

$V \times W = \{ (v, w) \mid v \in V, w \in W \}$ é um espaço vetorial com

$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2 , w_1 + w_2)$;

soma em V

soma em W

$\lambda (v, w) = (\lambda \cdot v , \lambda \cdot w)$

produto por escalar em V

produto por escalar em W

Exemplo $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\text{-vezes}}$

2) Se $(W,+,\cdot)$ é um espaço vetorial e X é um conjunto qualquer

$\Rightarrow V = \mathcal{F}(X,W) = \{f : X \to W\}$ com

Soma: $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$

Soma em $\mathcal{F}(X,W)$ Soma em W

Produto por escalar: $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot (f(x))$

produto por escalar em $\mathcal{F}(X,W)$ produto p/ escalar em W

$(V,+,\cdot)$ é um espaço vetorial

3) Se $(W,+,\cdot)$ é um espaço vetorial

$$\Rightarrow V = \mathcal{M}_{m\times n}(W) = \left\{ \begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{m1} & \cdots & w_{mn} \end{pmatrix} \middle| \; w_{ij} \in W \right\}$$ é um

espaço vetorial (com soma e produto por escalar coordenada à coordenada usando a soma e produto por escalar de W)

Exemplo: Seja $W = P_2(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow V = \mathcal{M}_{3\times 3}(W) = \left\{ \begin{pmatrix} a_0+a_1x+a_2x^2 & b_0+b_1x+b_2x^2 & c_0+c_1x+c_2x^2 \\ d_0+d_1x+d_2x^2 & e_0+e_1x+e_2x^2 & f_0+f_1x+f_2x^2 \\ g_0+g_1x+g_2x^2 & h_0+h_1x+h_2x^2 & i_0+i_1x+i_2x^2 \end{pmatrix} \right\}$$

onde $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, \ldots, i_0, i_1, i_2$ são números reais

4) Se $(W,+,\cdot)$ é um espaço vetorial

$\Rightarrow V = P_n(W) = \{ w_0 + w_1x + \cdots + w_nx^n \mid w_i \in W \}$ é um espaço vetorial

(Qual a soma e produto por escalar "natural" ???)

5) Seja $(W, +, \cdot)$ um espaço vetorial e seja

$$f : X \longrightarrow W$$ uma função bijetora

com inversa

$$f^{-1} : W \longrightarrow X$$

Podemos usar f para "transportar" a estrutura de espaço vetorial de W para X. Explicitamente, definimos

Soma em X:

$$x + y = f^{-1}\big(f(x) + f(y)\big)$$

Soma em W

Produto por escalar em X:

$$\lambda \cdot x = f^{-1}\big(\lambda \cdot f(x)\big)$$

produto por escalar em W

Exemplo: Sejam $W = (\mathbb{R}, +, \cdot)$ (Soma e produto usual)

$$X = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \ln x$$ com inversa $f^{-1}(a) = e^{a}$

Em X obtemos uma soma e produto por escalar que vou denotar por $\boxplus$ e $\boxdot$ para não causar confusão

$$x \boxplus y = e^{(\ln x + \ln y)} = e^{\ln xy} = xy$$

$$\lambda \boxdot x = e^{\lambda \ln x} = e^{\ln x^{\lambda}} = x^{\lambda}$$

Exercício: Para cada uma das construções acima, demonstre que o resultado é um espaço vetorial.